Deutsche Universität für Verwaltungswissenschaften Speyer

Holger Mühlenkamp / Peter Sossong

Zum „Unsinn“ kommunaler CMS-Spread-Ladder-Swaps

Speyerer Arbeitsheft Nr. 209

ISSN 0179-2318

Speyer 2012

Deutsche Universität für
Verwaltungswissenschaften Speyer

Postfach 14 09 · 67324 Speyer
Freiherr-vom-Stein-Str. 2 · 67346 Speyer
Telefon: +49(0)6232 654-215
Telefax: +49(0)6232 654-208
E-Mail: grissmer@uni-speyer.de
Internet: www.uni-speyer.de

Zum „Unsinn“ kommunaler CMS-Spread-Ladder-Swaps

Von Dipl.-Kfm. *Peter Sossong* und Prof. Dr. *Holger Mühlenkamp*, Speyer*

1 Einleitung

Seit der Jahrtausendwende haben mehr als 200 Gemeinden und im kommunalen Eigentum stehende Unternehmen sogenannte Zinsswaps mit ihren Kreditinstituten abgeschlossen.[1] Aus den Swapgeschäften der Kommunen resultierten vielfach hohe Verluste. Die Stadt Pforzheim hat beispielsweise innerhalb weniger Jahre Gesamtverluste in Höhe von rund 56 Millionen Euro erlitten, was einem Verlust von circa 470 Euro pro Einwohner entspricht.[2] Bei der Stadt Ennepetal liefen aus einzelnen Geschäften circa 260 Euro pro Einwohner auf.[3] Die der Stadt Hagen – aus einzelnen Geschäften – entstandenen Verluste betragen circa 250 Euro pro Kopf.[4] Die Aufzählung betroffener Gemeinden ließe sich nahezu beliebig fortsetzen. Es existieren Schätzungen, die das Gesamtschadenspotenzial der deutschlandweit eingegangenen Geschäfte auf mehr als 1 Milliarde Euro beziffern.[5]

Die Entwicklung wurde offenbar als derart besorgniserregend empfunden, dass der Finanzausschuss des Deutschen Bundestags im Jahr 2011 eine öffentliche Anhörung zur Problematik durchgeführt hat. Hierbei kristallisierte sich heraus, dass ein wesentlicher Teil der Verluste aus einer „exotischen“[6], als CMS-Spread-Ladder-Swap (CSL-Swap) bezeichneten, Swapvariante resultierte.

Anders als beim einfachen Zinsswap, der üblicherweise zur Absicherung oder als „Gegenposition“ von sog. Grundgeschäften dient, handelt es sich beim deutlich komplexeren CSL-Swap um ein reines Spekulationsgeschäft. Mittels eines CSL-Swaps wetten die Kommunen – verbotenerweise[7] – auf eine hinreichend große Differenz zwischen langfristigen und kurzfristigen (Swap-)Zinssätzen.

---

* Prof. Dr. *Holger Mühlenkamp* ist Inhaber des Lehrstuhls für Öffentliche Betriebswirtschaftslehre an der Deutschen Universität für Verwaltungswissenschaften Speyer. Dipl.-Kfm. *Peter Sossong* ist als wissenschaftlicher Mitarbeiter an diesem Lehrstuhl tätig.

[1] Vgl. Rössner (2011), S. 10. Andere Quellen sprechen gar von 1.000 bis 2.000 Kommunen; vgl. hierzu Nieding/Barth (2011), S. 2.

[2] Vgl. Hager (2011), S. 2. Der Pro-Kopf-Verlust lässt sich ermitteln, indem der Gesamtverlust i. H. v. 56 Millionen Euro durch die Einwohnerzahl der Stadt i. H. v. ca. 120.000 Einwohnern geteilt wird.

[3] Vgl. LG Düsseldorf vom 11. 5. 2012 – 8 O 77/11. Der genante Pro-Kopf-Verlust lässt sich ermitteln, indem der Streitwert i. H. v. 7.968.156,79 Euro durch die Einwohnerzahl i. H. v. ca. 30.500 Einwohnern geteilt wird.

[4] Vgl. LG Wuppertal vom 16. 7. 2008 – 3 O 33/08. Der genannte Pro-Kopf-Verlust lässt sich ermitteln, indem der Streitwert i. H. v. 49.485.107,29 Euro durch die Einwohnerzahl i. H. v. ca. 195.000 Einwohnern geteilt wird.

[5] Vgl. Nieding/Barth (2011), S. 2.

[6] Vgl. Stark/Loose (2007).

[7] Zum kommunalen Spekulationsverbot vgl. z. B. Weck/Schick (2012).

Die im Zuge der Anhörung vor dem Finanzausschuss des Bundestags geladenen Sachverständigen vertraten sowohl in der Debatte als auch in ihren schriftlichen Stellungnahmen zur Debatte nahezu einheitlich die Ansicht, dass die hohe Komplexität der CSL-Geschäftsstruktur hauptursächlich für die gehäufte Verlustentstehung bei den kommunalen Bankkunden gewesen sei. Die Komplexität habe dazu geführt, dass die Bankkunden nicht mehr in der Lage gewesen seien, die realökonomischen Wirkungen der Geschäfte vollumfänglich zu beurteilen, wodurch sie anfällig geworden seien, auch solche Geschäfte abzuschließen, die systematisch zu ihrem Nachteil verzerrt waren.[8] Auch die Kommunalaufsicht, deren Aufgabe nach der hier vertretenen Auffassung u. a. in der Verhinderung derartiger Geschäfte besteht, scheint den Gehalt der CSL-Swaps offenbar regelmäßig nicht durchschaut zu haben.

Diese auf mangelnde Erkenntnismöglichkeit des Bankkunden abstellende Analyse lässt die Frage ins Blickfeld rücken, von welchen Faktoren die Erkenntnismöglichkeit des Bankkunden geprägt wird. Basis aller gängigen, zur Beurteilung von finanzwirtschaftlichen Entscheidungsmöglichkeiten zum Einsatz kommender Methoden ist das sogenannte μ-σ-Prinzip. Das Prinzip besagt: Sind die aus einer finanzwirtschaftlichen Entscheidungsmöglichkeit resultierenden Zahlungen in dem Sinne mit Unsicherheit behaftet, dass sie ihrer Höhe nach von der zukünftigen Entwicklung der entscheidungsrelevanten Umwelt abhängen, so wird zur Beurteilung der Entscheidungsmöglichkeit auf den Erwartungswert und die Varianz des aus der Entscheidung resultierenden Zahlungsstroms abgestellt.[9] Nichts anderes gilt für CSL-Swaps. Zur rationalen Entscheidungsfindung ist es daher zwingend erforderlich, dass der Bankkunde die Ausprägungen der entscheidungsrelevanten Kennzahlen „Erwartungswert“ und „Varianz“ vor Geschäftsabschluss hinreichend belastbar bestimmen kann.

An der Ermittelbarkeit der Kennzahlen setzt der vorliegende Beitrag an. Ziel ist es aufzuarbeiten, inwieweit es möglich ist, Erwartungswert und Varianz des aus einem CSL-Swap resultie-

---

[8] Im BHG-Urteil vom 22. 3. 2011 wird deutlich, dass die beklagte Bank einem – in diesem Fall privaten – Unternehmen einen CSL-Swap verkaufte, der aus Sicht des Kunden einen negativen Barwert aufwies. Stark/Loose (2007, S. 613 f.) weisen in einer Simulationsrechnung mit kompensationslosem Kündigungsrecht der Bank anhand eines anonymisierten Praxisfalls einen negativen Erwartungswert für den Kunden in Höhe von 9 Mio. € aus.
Vor diesem Hintergrund ist bspw. die Stellungnahme von „Rössner Rechtsanwälte“ zu sehen, in der es wörtlich heißt: *„Der Verkauf derartiger strukturierter Produkte* [CSL-Swaps] *hat nur einen Nutzen für die das Produkt strukturierende Bank. Die Bank strukturiert im Ergebnis synthetische Risiken und verkauft diese mit hohen realen – teilweise sogar unbegrenzten – Verlustrisiken an ihre Kunden. Weil die Banken selbst die Struktur zulasten des Kunden modellieren, schaffen sie sich eine eigene risikofreie Arbitrage-Möglichkeit. Nutzt die Bank diese Arbitrage-Möglichkeit aus, erwirtschaftet sie selbst einen risikofreien Gewinn. Der Kunde kann wegen der ihm fehlenden Erkenntnismöglichkeit das ihm durch die Struktur übertragene höhere Risiko nicht erkennen* (...)*“*; Rössner (2011), S. 4.

[9] Vgl. statt (sehr) vieler bspw. Perridon/Steiner/Rathgeber (2009), S. 102-141; Drukarczyk/Schüler (2009) und Bamberg/Baur/Krapp (2007), S. 127-128.

renden Zahlungsstroms hinreichend verlässlich abzuschätzen. Die Beurteilung folgt einem viergliedrigen Aufbau. Zunächst werden, im Anschluss an eine einführende Darstellung von CSL-Swaps, die einzeln aus einem CSL-Swap resultierenden Zahlungen formal dargestellt (Abschnitt 2). Darauf aufbauend wird herausgearbeitet, von welchen Inputgrößen Erwartungswert und Varianz des sich ergebenden Zahlungsstroms abhängen und welche funktionale Gestalt die Abhängigkeit aufweist (Abschnitt 3). Basierend auf der Kenntnis der funktionalen Beziehungen zwischen Inputgrößen und entscheidungsrelevanten Kennzahlen wird anhand eines Referenzbeispiels ermittelt, wie sensitiv die Kennzahl Erwartungswert auf Änderungen der Inputgrößen reagiert (Abschnitt 4). Abschließend wird herausgestrichen, welche Implikation die gefundenen Resultate für die Frage der rationalen Beurteilbarkeit von CSL-Swaps aufweisen (Abschnitt 5).

2 Geschäftsstruktur eines CMS-Spread-Ladder-Swaps[10]

2.1 Eine erste Skizze von CSL-Swaps

Zinsswaps bedeuten den Tausch (Swap) von Zinszahlungen in einer Währung zwischen zwei Vertragsparteien. Beim Standardzinsswap verpflichtet sich eine Vertragspartei („Payer“) zur Zahlung eines laufzeitabhängigen, festen Zinses (sog. Swap(zins)satz) auf einen bestimmten (fiktiven) Betrag, während sich die andere Vertragspartei („Receiver“) zur Zahlung eines variablen Zinssatzes (z. B. orientiert an der LIBOR oder der EURIBOR)[11] auf den gleichen Betrag festlegt. Zinsswaps ermöglichen die Transformation von früher abgeschlossenen Kredit- oder Anlageverträgen (sog. Grundgeschäften). Feste (variable) Verbindlichkeiten oder Geldanlagen können in variable (feste) Verbindlichkeiten bzw. Geldanlagen überführt werden, so dass Zins-Swaps zum Zwecke des Zinsrisikomanagements genutzt werden können.

Damit Swapgeschäfte zustande kommen können, müssen sich Swappartner finden, die unterschiedliche Erwartungen über die Zinsentwicklung haben und zum gleichen Zeitpunkt entgegengesetzte Swapgeschäfte mit gleicher Laufzeit schließen möchten. Die Swappartner werden üblicherweise von Finanzintermediären (Banken) zusammengeführt, die dafür 0,03 % bis 0,04 % Zinsen verlangen. In diesem Fall bestehen keine unmittelbaren vertraglichen Bezie-

[10] Vgl. zu der in diesem Abschnitt beschriebenen Struktur eines CSL-Swaps bspw. BGH vom 22. 3. 2011 – XI ZR 33/10 und sehr ähnlich OLG Bamberg vom 11. 5. 2009 – 4 U 92/08 sowie LG Wuppertal vom 16. 7. 2008 – 3 O 33/08.

[11] LIBOR bezeichnet die London Interbank Offered Rate und entspricht dem täglich festgelegten Referenzzinssatz im Interbankengeschäft. Die Euro Interbank Offered Rate (EURIBOR) bezeichnet dagegen den durchschnittlichen laufzeitabhängigen Zinssatz, zu dem sich die sog. Panel-Banken gegenseitig Euro-Anleihen gewähren.

hungen zwischen den Swap-Partnern. Beide Seiten kennen die Gegenseite nicht. Sie haben lediglich einen Vertrag mit der Bank, die damit das Kontrahentenrisiko trägt.[12] Das Risiko der Vertragspartner ergibt sich bei gewöhnlichen Swap-Geschäften aus dem Saldo der Zinszahlungen aus Basisgeschäft plus Swap-Geschäft und ist normalerweise überschaubar.

Bei einem Constant Maturity Swap (CMS) wird – wie bei einem gewöhnlichen Zinsswap – ein kurzfristiger Zinssatz gegen einen längerfristigen Zinssatz getauscht. Allerdings sind im Gegensatz zu gewöhnlichen Zinsswaps beide Zinssätze variabel. Beispielsweise kann die Zinszahlung eines Swap-Partners in vorher definierten Zeitabständen an den jeweils aktuellen 10-Jahres-Swapsatz (CMS 10) angepasst werden, während sich die Zinszahlung des anderen Vertragspartners am jeweils aktuellen 2-Jahres-Swapsatz (CMS 2) ausrichtet.[13]

Die Besonderheit des CSL-Swaps besteht nun darin, dass die variable Zahlung des „Receivers“ u. a. durch die Differenz („Spread“) zweier Swapsätze – beispielsweise aus CMS 10 abzüglich CMS 2 – bestimmt wird. Der vom Receiver (Kommune) zu zahlende Zins orientiert sich jedoch nicht nur am Spread, sondern auch an den Zinsen des Vorjahres und weiteren vertraglich festgelegten Parametern. Der „Payer“ (Bank) zahlt dagegen einen festen Zins(satz) (vgl. Abb. 1).

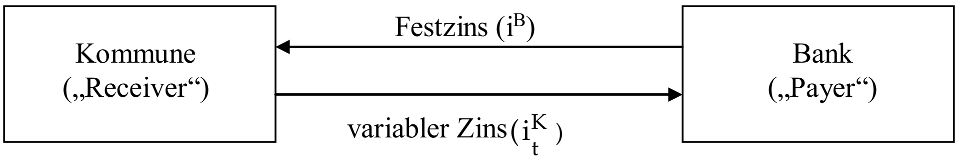

Abb. 1: „Zinstausch“ zwischen Bank und Kommune bei einem CSL-Swap

Da sich die Zinszahlungen auf einen vertraglich fixierten Referenzbetrag (K) beziehen, beläuft sich die zu einem Zahlungszeitpunkt t anfallende Nettozahlung der Kommune (NZ_t) auf:

$$NZ_t = i^B \cdot K - i_t^K \cdot K \qquad (1)$$

i^B bezeichnet den Festzinssatz der Bank und i_t^K den variablen Zinssatz der Kommune. Damit NZ_t positiv ist, muss gelten:

$$i^B > i_t^K \qquad (2)$$

[12] Vgl. z. B. Bösch (2012), S. 205 ff.
[13] Da die Laufzeiten der zugrunde gelegten Zinszwaps gleich bleiben (hier 2 und 10 Jahre), spricht man von „Constant Maturity Swaps“ (vgl. Stark/Loose 2007, S. 610.).

Da i^B fix ist, hängt die Vor- oder Nachteilhaftigkeit des Geschäfts für beide Vertragspartner von der Entwicklung der zahlungszeitpunktspezifischen i_t^K ab. Deshalb schauen wir nun, wie die i_t^K ermittelt werden.

Für die erste Zahlungsperiode ist der von der Kommune zu zahlende Zins vorab fix vereinbart. Ab Zahlungsperiode 2 berechnet sich die Zahlungsverpflichtung der Kommune dagegen aus der Formel

$$i_t^K = i_{t-1}^K + m\underbrace{[s_t - (\overbrace{CMS10_t - CMS2_t}^{\text{„Spread“}})]}_{\text{„Ladder“}} \tag{3}$$

i_t^K stellt den von der Kommune zum Zeitpunkt $t > 1$ zu zahlenden Zinssatz dar. m bezeichnet einen vertraglich vereinbarten Multiplikator („Hebel“). s_t ist der vertraglich für jede Periode vereinbarte sog. Strike, welcher in der Regel mit t abnimmt.

Es ist aus (3) klar erkennbar, dass der von der Kommune zu zahlende Zins in der Folgeperiode steigt, wenn die sog. Ladder

$$m\, s_t - m\,(CMS\ 10_t - CMS\ 2_t) > 0 \tag{3a}$$

bzw.

$$s_t + CMS\ 2_t > CMS\ 10_t \tag{3b}$$

bzw.

$$s_t > CMS\ 10_t - CMS\ 2_t \tag{3c}$$

ist. Bei umgekehrten Ungleichheitszeichen geht es dagegen die Leiter hinunter.

Bei einer normalen sog. Zinsstrukturkurve, die den Zusammenhang zwischen der Höhe der Zinsen und der Laufzeit von Kreditgeschäften beschreibt, sind die langfristigen Zinsen höher als die kurzfristigen Zinsen, es gilt also $CMS\ 10_t > CMS\ 2_t$. Dies reicht jedoch nicht aus, um ein Anwachsen der von der Kommune zu zahlenden Zinsen zu verhindern. Vielmehr muss gemäß (3b) der CMS 10 größer sein als der Strike plus der CMS 2 oder äquivalent nach (3c) muss der Strike kleiner als die Differenz zwischen lang- und kurzfristigen Zinsen sein. Dies bedeutet, dass die Zinsstrukturkurve hinreichend steil sein muss bzw. je höher der Strike, desto steiler muss die Zinsstrukturkurve sein. Anderenfalls inkl. der Situation von flacher und inverser Zinsstrukturkurve steigt der Zins in der nachfolgenden Periode.

Über den Hebel m kann die Wirkung des Spreads verstärkt oder vermindert werden. Wenn – wie in der Praxis offenbar geläufig – $m = 3$ gesetzt wird, können sich bei nicht hinreichend steiler Zinsstrukturkurve sehr schnell hohe Zinssteigerungen aufbauen.[14] Da die Zinsstruktur zu jedem Zahlungszeitpunkt zur Bestimmung der Zinsen späterer Zahlungszeitpunkte „mitgeschleppt“ wird, wirkt sich die Zinsstruktur eines Zahlungszeitpunktes um so stärker aus, je früher er liegt. Spätere Entwicklungen haben nur noch einen geringen Einfluss.[15]

Anzumerken ist, dass sich die Banken bei den CSL-Swap-Verträgen regelmäßig einseitige Kündigungsrechte und eine Risikobegrenzung vorbehalten haben.[16] So kann die Bank einen CSL-Swap-Vertrag vorzeitig ohne Ausgleichszahlung kündigen. Dies ermöglicht ihr, bei aus ihrer Sicht ungünstiger Zinsentwicklung den Vertrag kostenlos zu beenden. Bei vorzeitiger Kündigung der Kommune sind dagegen regelmäßig Ausgleichzahlungen vorgesehen, die sich am Marktwert des Vertrages orientieren und daher sehr hohe Beträge ausmachen können. Darüber hinaus kann gemäß Formel (3) die Leiter bei einem sehr hohen Spread abwärts zu einem negativen Zins führen. In diesem – für die Bank ungünstigen – Fall hätte die Bank zusätzlich zu ihrer Festzinsverpflichtung aus i^B noch eine Zahlung aus i_t^K zu leisten. Letzteres schließen die Banken jedoch aus.[17] Dagegen gibt es für die Kunden bei einem Aufstieg auf der Leiter keine Zinsobergrenze.

Im Gegensatz zu den oben skizzierten gewöhnlichen Zinsswaps basieren CSL-Swaps nicht auf Grundgeschäften. Es handelt sich um reine Spekulationen auf die Entwicklung der Zinsstrukturkurve. Ökonomisch lässt sich Formel (3) so interpretieren, dass die Gemeinde langfristige Forderungen (CMS 10) durch kurzfristige Forderungen (CMS 2) finanziert und an der Zinsdifferenz verdient. Allein dies impliziert jedoch ein erhebliches Risiko, weil dieses Geschäftsmodell nur unter der Bedingung einer hinreichend steilen Zinskurve funktioniert. Zudem ist die Fristentransformation mittels CSL-Swaps (unnötig) indirekt, kompliziert und mit zusätzlichen (Risiko-)Kosten ohne entsprechende Renditeerwartung verbunden. *„Die kumulierte Verknüpfung der Zinsfaktoren erzeugt zusätzliches Risiko über das natürliche Maß einer Fristentransformation hinaus, dem keine weitere Risikoprämie gegenübersteht.“*[18]

---

[14] Vgl. Stark/Loose (2007), S. 611 f.

[15] Stark/Loose (2007, S. 614) sprechen von einer *„Zeitkonzentration“*. Diese steht in Kontrast zu einer gleichmäßigen zeitlichen Verteilung („Zeitdiversifikation“) von Kreditaufnahmen und -prolongationen mit dem Ziel der Glättung von zeitlich variierenden Zinseffekten.

[16] Gundermann/Nieding (2007), S. 266.

[17] Diese Regelung hat für die Bank den Vorteil, dass sie den Vertrag bei einer für sie ungünstigen Entwicklung in einer Periode nicht gleich zu kündigen braucht. Dies wird sie nur tun, wenn sie die Erwartung hat, dass sich der Vertrag über die gesamte Laufzeit ungünstig entwickelt.

[18] Stark/Loose (2007), S. 615.

Anders als beim einfachen Zinsswap, bei dem der Gesamtertrag aus Grundgeschäft und Swap zur Beurteilung des „Gesamtgeschäftes“ heranzuziehen ist, ist ein CSL-Swap „stand alone“ zu beurteilen. Es handelt sich insgesamt um ein Nullsummenspiel. Der zu jedem Zahlungszeitpunkt und insgesamt auftretende Zahlungsüberschuss des Kunden ist – sofern von sog. Hedging seitens der Bank abstrahiert wird – das Zahlungsdefizit der Bank und vice versa.

2.2 Formale Beschreibung von CSL-Swaps

Die Zahlungen, die sich die Vertragspartner mit Abschluss eines CSL-Swaps zu bestimmten, in der Zukunft liegenden Zeitpunkten zu leisten versprechen, werden als Zins auf einen rein fiktiven, d. h. nicht tatsächlich getauschten, Kapitalbetrag definiert.

Das Kreditinstitut leistet zu jedem Zahlungszeitpunkt einen über die Vertragslaufzeit unveränderlichen fixen Zins.

Mit den Bezeichnungen:

$T = \{t \mid t \in \mathbb{N} \wedge t \leq n\}$:	Menge der n Zeitpunkte des Geschäfts, an denen Zahlungen getauscht werden (bei Geschäftsabschluss vereinbart),
$K \in]0; \infty[$:	dem Geschäft als Bezugsgröße dienender Kapitalbetrag (konkrete Höhe bei Geschäftsabschluss vereinbart),
$i^B \in]0; 1]$:	Zinssatz, der die Höhe der von der Bank zu erbringenden Zahlungen determiniert (konkrete Höhe bei Geschäftsabschluss vereinbart),
Z_t^B:	von der Bank zum Zeitpunkt $t \in T$ zu erbringende Zahlung (konkrete Höhe (implizit) über Festlegung von K und i^B bei Geschäftsabschluss vereinbart)

gilt für die Höhe der von der Bank zum Zeitpunkt t zu erbringenden Zahlung Z_t^B:

$$Z_t^B = K \cdot i^B. \tag{4}$$

Der Bankkunde leistet im Gegenzug einen sich über die Vertragslaufzeit ändernden variablen Zins.

Mit den Bezeichnungen:

$i_1^K \in]0;1]$:	Zinssatz, der die Höhe der zum Zeitpunkt $t = 1$ vom Kunden zu erbringenden Zahlung determiniert (konkrete Höhe bei Geschäftsabschluss vereinbart),
i_t^K:	Zinssatz, der die Höhe der vom Kunden zum Zeitpunkt $t > 1$ zu erbringenden Zahlung determiniert (konkrete Höhe der Zinnsätze bei Geschäftsabschluss unbekannt, da von künftiger Entwicklung der Zinsstrukturkurve abhängig),
$m \in]0; \infty[$:	als Multiplikator bezeichnete Konstante (konkrete Höhe bei Geschäftsabschluss vereinbart),

$S = \{s_t \mid t \in \{2;\ldots;n\} \wedge s_t \in [0;1]\}$: Menge, die aus n-1 als Strike der Periode t bezeichneten Konstanten s_t besteht (konkrete Höhe der einzelnen Konstanten bei Geschäftsabschluss vereinbart),

sp_t: zum Zeitpunkt t bestehende Differenz (Spread) zwischen dem 10-Jahres-EUR-Interbanken-Swapsatz (CMS 10) und dem 2-Jahres-EUR-Interbanken-Swapsatz (CMS 2) (konkrete Höhe bei Geschäftsabschluss unbekannt, da von Kapitalmarktentwicklung abhängig),

Z_t^K: vom Kunden zum Zeitpunkt $t \in T$ zu erbringende Zahlung (für $t = 1$ konkrete Höhe (implizit) über Festlegung von K und i_1^K bei Geschäftsabschluss vereinbart, für $t > 1$ konkrete Höhe bei Geschäftsabschluss unbekannt, da über i_t^K von Kapitalmarktentwicklung abhängig)

ist der Zinssatz, der zur Bemessung der vom Bankkunden zum Zeitpunkt t zu leistenden Zahlung heranzuziehen ist, folgendermaßen definiert:[19]

$$i_t^K = \begin{cases} i_1^K, \text{ für } t = 1 \\ i_1^K + m \cdot \left[\sum_{j=2}^{t} s_j\right] - m \cdot \left[\sum_{k=2}^{t} sp_k\right], \text{ für } t > 1 \end{cases} = i_1^K + m \cdot \left[\sum_{j=2}^{t} s_j\right] - m \cdot \left[\sum_{k=2}^{t} sp_k\right], \text{ für alle } t \tag{5}$$

Für die Höhe der vom Kunden zum Zeitpunkt t zu erbringenden Zahlung ergibt sich – unter Verwendung der vereinfachenden Bezeichnung d_t für die bereits bei Vertragsabschluss für die einzelnen Zeitpunkte t (implizit) festgelegten Konstanten $i_1^K + m \cdot \left(\sum_{j=2}^{t} s_j\right)$ – somit:

$$Z_t^K = K \cdot i_t^K = K \cdot \left(i_1^K + m \cdot \left[\sum_{j=2}^{t} s_j\right] - m \cdot \left[\sum_{k=2}^{t} sp_k\right]\right) = K \cdot \left(d_t - m \cdot \left[\sum_{k=2}^{t} sp_k\right]\right). \tag{6}$$

Für die zum Zeitpunkt t zu tauschenden Zahlungen gilt also netto:

$$NZ_t = Z_t^B - Z_t^K = K \cdot \left(i^B - d_t + m \cdot \left[\sum_{k=2}^{t} sp_k\right]\right). \tag{7}$$

Gilt $NZ_t > 0$, erhält der Kunde eine Nettozahlung. Bei $NZ_t < 0$ erhält die Bank eine Nettozahlung.

Über die bisher beschriebenen Vertragsbedingungen hinaus findet sich – wie bereits oben erwähnt – in den Vertragswerken der Praxis regelmäßig eine Klausel, die das Risiko der Kreditinstitute begrenzt. Festgeschrieben wird, dass der vom Kunden zu leistende Zinssatz nicht negativ werden darf (Nichtnegativitätsklausel des Kundenzinssatzes), d. h. es wird ausgeschlossen, dass das Kreditinstitut über seine fixen Zahlungen hinaus zusätzlich eine variable Zahlung zu erbringen hat.

[19] Vgl. Anhang I.

Ergibt sich nach der zur Bestimmung des vom Kunden zu leistenden Zinssatzes heranzuziehenden Formel ein negativer Wert, so wird der Zinssatz auf 0 gesetzt. Formal wird der vom Kunden zu erbringende Zinssatz i_t^K also zu ${}^{Cap}i_t^K$ mit:

$$
{}^{Cap}i_t^K = \max\left\{0; d_t - m \cdot \left[\sum_{k=2}^{t} sp_k\right]\right\} = \begin{cases} d_t - m \cdot \left[\sum_{k=2}^{t} sp_k\right] & \text{, für } \left[\sum_{k=2}^{t} sp_k\right] \leq \dfrac{d_t}{m} \\ 0 & \text{, für } \left[\sum_{k=2}^{t} sp_k\right] > \dfrac{d_t}{m} \end{cases} \tag{8}
$$

und demzufolge wird NZ_t zu NZ_t^{Cap} mit:

$$
NZ_t^{Cap} = K \cdot i^B - K \cdot {}^{Cap}i_t^K = \begin{cases} K \cdot \left(i^B - d_t + m \cdot \left[\sum_{k=2}^{t} sp_k\right]\right) & \text{, für } \left[\sum_{k=2}^{t} sp_k\right] \leq \dfrac{d_t}{m} \\ K \cdot i^B & \text{, für } \left[\sum_{k=2}^{t} sp_k\right] > \dfrac{d_t}{m} \end{cases} . \tag{9}
$$

2.3 Qualitative Beschreibung der CSL-Swap-Geschäftsstruktur

Bei Betrachtung des aus einem CSL-Swap entspringenden Zahlungsstroms fällt auf, dass sich die zum Zahlungszeitpunkt 1 anfallende Nettozahlung einerseits und alle übrigen Nettozahlungen andererseits in einem zentralen Punkt unterscheiden.

Die zum Zahlungszeitpunkt 1 anfallende Nettozahlung NZ_1^{Cap} ist insofern zustandsunabhängig[20], als ihre Höhe nicht von dem nach Geschäftsabschluss eintretenden Umweltzustand beeinflusst wird. Mit Vertragsabschluss werden den Geschäftsparametern $K; i^B$ und i_1^K konkrete Zahlenwerte zugeordnet und somit wird die Höhe der Zahlung – über die Gleichung (9), die für t = 1 die Gestalt $NZ_1^{Cap} = K \cdot (i^B - i_1^K)$ aufweist – auf den Betrag $K \cdot (i^B - i_1^K)$ fixiert.

Alle nachfolgenden Zahlungen sind hingegen zustandsabhängig. Die Höhe einer zu einem Zahlungszeitpunkt t > 1 anfallenden Nettozahlung bemisst sich in Abhängigkeit von dem erst nach Geschäftsabschluss am Kapitalmarkt zu beobachtenden Wert von $\sum_{k=2}^{t} sp_k$. Je höher der Wert von $\sum_{k=2}^{t} sp_k$ ist, desto größer ist die dem Kunden zustehende Nettozahlung bzw. desto geringer ist die von ihm zu erbringende Zahlung (vgl. Abbildung 2). Mit Geschäftsabschluss spekuliert der Kunde somit darauf, dass zum ersten Zahlungszeitpunkt, an dem eine zustandsabhängige Nettozahlung anfällt (zustandsabhängiger Zahlungszeitpunkt), die – formal durch $\sum_{k=2}^{2} sp_k = sp_2$ repräsentierte – Differenz (Spread) zwischen dem 10-Jahres-EUR-

[20] Die Begriffe *„zustandsabhängige Zahlung"* und *„zustandsunabhängige Zahlung"* entstammen der von Drukarczyk und Schüler verwendeten Terminologie. Vgl. Drukarczyk/Schüler (2009), S. 35-59.

Interbanken-Swapsatz und dem 2-Jahres-EUR-Interbanken-Swapsatz[21] möglichst groß ist. Ebenso setzt er darauf, dass an den folgenden Zahlungszeitpunkten 3 bis n die – formal durch $\sum_{k=2}^{t} sp_k = sp_2 + sp_3 + ... + sp_t$, mit $t \in \{3; 4; ...; n\}$, repräsentierten – Summen aus dem jeweiligen am Zahlungszeitpunkt vorliegenden Spread und den Spreads, die an den vorangehenden zustandsabhängigen Zahlungszeitpunkten vorlagen, hohe Werte aufweisen.

Begrenzt wird die Chance des Kunden auf einen hohen Zahlungsüberschuss allerdings dadurch, dass eine Erhöhung von $\sum_{k=2}^{t} sp_k$ nur bis zum Wert $\frac{d_t}{m}$ beachtlich ist. Für Werte größer oder gleich $\frac{d_t}{m}$ greift die Nichtnegativitätsklausel des Kundenzinssatzes und die Nettozahlung beträgt (abschnitts-)konstant $K \cdot i^B$.

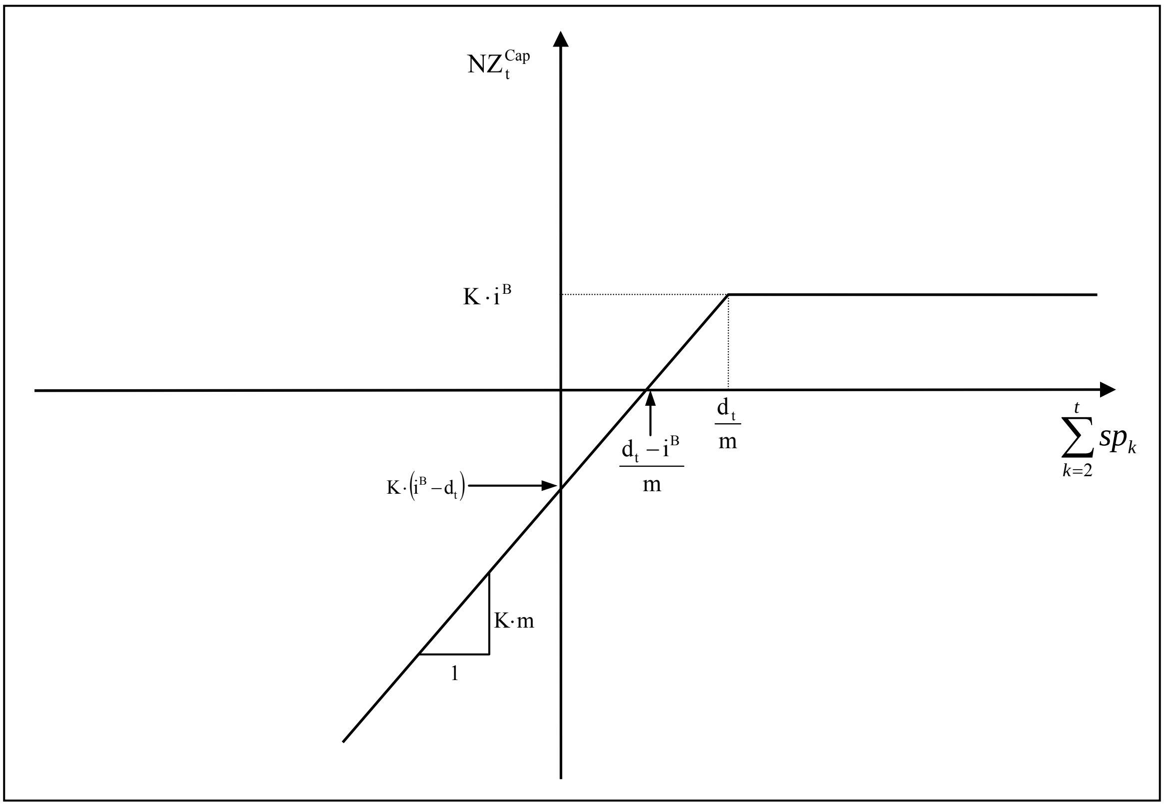

Abb. 2: Funktionale Abhängigkeit der Nettozahlung NZ_t^{Cap} von $\sum_{k=2}^{t} sp_k$ (eigene Darstellung)

[21] Die Geschäftspartner können statt des sog. 10-Jahres-EUR-Interbanken-Swapsatzes und des sog. 2-Jahres-EUR-Interbanken-Swapsatzes grundsätzlich auch andere Zinssätze als Bezugspunkt des Geschäfts wählen. Die genannten Zinssätze sind in der Praxis häufig als Bezugspunkt zu finden; vgl. bspw. LG Wuppertal vom 16. 7. 2008 – 3 O 33/08.

3 Erwartungswert und Varianz des Barwerts der aus einem CSL-Swap resultierenden Zahlungen

An einem konkreten Zahlungszeitpunkt t ist die exakte Höhe von $\sum_{k=2}^{t} sp_k$ bekannt. Die fällige Nettozahlung lässt sich mit Hilfe von (9) ermitteln. Verlässt man jedoch diese ex post Perspektive und geht zur ex ante Perspektive, also zum Zeitpunkt des Vertragsabschlusses, über, so ist die sich später realisierende Höhe von $\sum_{k=2}^{t} sp_k$ noch unbekannt. Im Folgenden wird die bei Vertragsabschluss gegebene Perspektive eingenommen. Mit der Zufallsvariablen SP'_t wird der zum Zeitpunkt t eintretende Spread beschrieben. Mit $\sum_{w=2}^{t} SP'_w$ wird die Zufallsvariable bezeichnet, die sich durch Summation der Zufallsvariablen SP'_w, mit $w \in \{2;...;t\}$, ergibt.

Erwartungswert und Varianz der zu einem Zeitpunkt $t > 1$ anfallenden Nettozahlung NZ_t^{Cap} sind abhängig von der Verteilungsfunktion, der $\sum_{w=2}^{t} SP'_w$ unterliegt.[22] Statistisch abgesichert[23] kann unterstellt werden, dass $\sum_{w=2}^{t} SP'_w$, für alle $t > 1$, normalverteilt ist. Bezeichnet man mit μ_t den Erwartungswert der Summe aus den Spreads, die an zustandsabhängigen Zahlungszeitpunkten kleiner gleich t eintreten – oder technisch ausgedrückt den Erwartungswert der Zufallsvariablen $\sum_{w=2}^{t} SP'_w$, mit $t > 1$ – und mit σ_t die standardisierte Streuung der einzelnen Ausprägungen der genannten Summe um ihren Erwartungswert – oder technisch die Standardabweichung der Zufallsvariablen $\sum_{w=2}^{t} SP'_w$, mit $t > 1$ –, so lassen sich Erwartungswert und Varianz der zu einem Zeitpunkt $t > 1$ anfallenden Nettozahlungen angeben mit:[24]

$$E\left(NZ_t^{Cap}\right) = K \cdot i^B - K \cdot \left\{ \left(d_t - m \cdot \mu_t\right) \cdot F_{N(0,1)}\left(\frac{d_t - m \cdot \mu_t}{m \cdot \sigma_t}\right) + \frac{m \cdot \sigma_t}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{d_t - m \cdot \mu_t}{m \cdot \sigma_t}\right)^2} \right\} \tag{10}$$

und

$$\begin{aligned} Var\left(NZ_t^{Cap}\right) = {} & \left(K \cdot i_B\right)^2 + F_{N(0,1)}\left(\frac{d_t - m \cdot \mu_t}{m \cdot \sigma_t}\right) \cdot K^2 \cdot \left\{ \left(i^B - d_t + m \cdot \mu_t\right)^2 + m^2 \sigma_t^2 - \left(i^B\right)^2 \right\} \\ & + e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{d_t - m \cdot \mu_t}{m \cdot \sigma_t}\right)^2} \cdot \frac{K^2 \cdot m \cdot \sigma_t}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \left(d_t - 2 \cdot i^B - m \cdot \mu_t\right) - E\left(NZ_t^{Cap}\right)^2 \end{aligned} \tag{11}$$

[22] Da NZ_1^{Cap} eine Konstante ist, erübrigt sich eine ausführliche Betrachtung des Zeitpunkts $t = 1$. Es gilt: $E\left(NZ_1^{Cap}\right) = K \cdot \left(i^B - i_1^K\right)$ und $Var\left(NZ_1^{Cap}\right) = 0$.

[23] Vgl. Anhang II.

[24] $F_{N(0,1)}$ bezeichnet die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung. Vgl. zur Berechnung von $E\left(NZ_t^{Cap}\right)$ Anhang III und zur Berechnung von $Var\left(NZ_t^{Cap}\right)$ Anhang IV.

Verdichtet man die zu einzelnen Zeitpunkten anfallenden Nettozahlungen mit den (nahezu) risikolosen laufzeitabhängigen Zinsätzen r_t zu ihrem Barwert, erhält man:

$$E\left[\sum_{t=1}^{n}\frac{NZ_t^{Cap}}{1+r_t}\right] = \sum_{t=1}^{n}\frac{E\left(NZ_t^{Cap}\right)}{1+r_t} \tag{12}$$

und

$$Var\left[\sum_{t=1}^{n}\frac{NZ_t^{Cap}}{1+r_t}\right] = \sum_{t=2}^{n}\frac{Var\left(NZ_t^{Cap}\right)}{\left(1+r_t\right)^2}+2\cdot\sum_{t=2}^{n}\sum_{u=2}^{t-1}\frac{Cov\left(NZ_u^{Cap},NZ_t^{Cap}\right)}{\left(1+r_u\right)\left(1+r_t\right)}, \tag{13}$$

mit $r_t \in \left]0;1\right]$: Periodenabhängiger Zinssatz, der die Gesamtverzinsung einer risikolosen Finanzanlage widerspiegelt, die vom Zeitpunkt 0 bis zum Zeitpunkt t läuft.

Für konkrete CSL-Swaps kann $E\left[\sum_{t=1}^{n}\frac{NZ_t^{Cap}}{1+r_t}\right]$ technisch ohne Weiteres bestimmt werden, indem die Erwartungswerte der einzelnen Nettozahlungen abgezinst und aufsummiert (kapitalisiert) werden.

Für $Var\left[\sum_{t=1}^{n}\frac{NZ_t^{Cap}}{1+r_t}\right]$ kann eine Abschätzung vorgenommen werden. Es gilt:[25]

$$Var\left[\sum_{t=1}^{n}\frac{NZ_t^{Cap}}{1+r_t}\right] \in \left]\sum_{t=2}^{n}\frac{Var\left(NZ_t^{Cap}\right)}{\left(1+r_t\right)^2};\ \sum_{t=2}^{n}\frac{Var\left(NZ_t^{Cap}\right)}{\left(1+r_t\right)^2}+2\cdot\sum_{t=2}^{n}\sum_{u=2}^{t-1}\frac{\sqrt{Var\left(NZ_u^{Cap}\right)\cdot Var\left(NZ_t^{Cap}\right)}}{\left(1+r_u\right)\left(1+r_t\right)}\right]. \tag{14}$$

4 Referenzbeispiel

4.1 Beschreibung des Geschäfts und Ermittlung der entscheidungsrelevanten Kennzahlen Erwartungswert und Varianz (Standardabweichung)

Der BGH hat im Jahr 2011 eine Grundsatzentscheidung zu einem CSL-Swap getroffen.[26] Im Zuge der Anhörung des Finanzausschusses wurde an verschiedener Stelle dieser CSL-Swap als Referenzfall zugrunde gelegt. Hieran anknüpfend soll im Folgenden ebenfalls auf dieses Geschäft abgestellt werden. Da es sich bei CSL-Swaps um hochgradig standardisierte Produkte handelt, die in (nahezu) identischer Form massenhaft vertrieben werden, ist von einer grundsätzlichen Verallgemeinerbarkeit der Ausführungen auszugehen.

Die Vertragsparteien hatten vereinbart, sich während der fünf Jahre betragenden Gesamtgeschäftslaufzeit zu insgesamt zehn Zahlungszeitpunkten gegenseitig Zahlungen zu leisten. Zu

[25] Vgl. Anhang V.
[26] Vgl. Vgl. BGH vom 22. 3. 2011 – XI ZR 33/10.

den ersten beiden Zahlungsterminen – im Folgenden zu einer Zahlung zum Zahlungstermin t = 1 zusammengefasst –[27] sollten zustandsunabhängige Zahlungen getauscht werden, zu den folgenden 8 Terminen – im Folgenden mit den Zeitpunkten t = 2; t = 3 bis t = 9 identifiziert – hingegen zustandsabhängige Zahlungen. Der erste Zahlungstermin war der 18. 8. 2005, die restlichen 9 Termine folgten in jeweils halbjährigem Abstand. Das Nominalvolumen des Geschäfts belief sich auf 2 Million Euro.[28] Eine nähere Beschreibung der übrigen Geschäftsparameter befindet sich in Anhang VI.

Erwartungswert und Varianz, die das Geschäft bei Vertragsabschluss aufwies, hängen – neben den bereits bei Geschäftsabschluss ihrer konkreten Höhe nach determinierten Parametern – ausschließlich von den für $\vec{\mu} := (\mu_2, \mu_3, ..., \mu_9)$ und $\vec{\sigma} := (\sigma_2, \sigma_3, ..., \sigma_9)$ zu unterstellenden Werten ab. Da diese Parameter nicht objektiv bestimmt werden können, sind sie letztlich immer auf Grundlage subjektiver Annahmen zu ermitteln.

Ein Weg zu (einigermaßen) plausibilisierbaren Werten ist die Betrachtung der Vergangenheit, das heißt der Zustände, die am Kapitalmarkt im Zeitraum vor dem Geschäftsabschluss zu beobachten waren. Stellt man beispielsweise auf den Zeitraum zwischen November 1972 und November 2004 ab, bestimmt die in diesem Zeitraum am Kapitalmarkt aufgetreten Spreads[29] in halbjährlichen Abständen und zieht die sich dabei ergebenden 65 Einzelwerte als Stichprobe heran, so ergibt sich ein Stichprobenmittel von 0,00939 und eine Stichprobenstandardabweichung von 0,00922, die – einigermaßen plausibel – als Schätzgrößen für μ_2 und σ_2 herangezogen werden können. Nach gleicher Methodik kann man Werte für die übrigen μ_t und σ_t bestimmen. Es ergeben sich folgende Werte:

$$\vec{\mu} = (0{,}00939;\ 0{,}01878;\ 0{,}02815;\ 0{,}03757;\ 0{,}04689;\ 0{,}05605;\ 0{,}06498;\ 0{,}07366),$$

$$\vec{\sigma} = (0{,}00922;\ 0{,}01768;\ 0{,}02548;\ 0{,}03244;\ 0{,}03861;\ 0{,}04400;\ 0{,}04858;\ 0{,}05214).$$

[27] Vgl. zu Details Anhang VI.

[28] Vgl. Vgl. BGH vom 22. 3. 2011 – XI ZR 33/10, S. 294.

[29] Zur Berechnung der Spreads wurden die Renditen von börsennotierten Bundeswertpapieren mit zwei- bzw. zehnjähriger Restlaufzeit herangezogen. Konkret wurde auf die von der Bundesbank bereitgestellten Zeitreihen „WZ 3401“ und „WZ 3409“ abgestellt. Diese Vorgehensweise entspricht der von Stark/Loose (2007) gewählten Methodik, die ausführen: *„Anstelle von Swapsätzen werden aufgrund der Verfügbarkeit historischer Zeitreihen Renditegrößen von Bundeswertpapieren herangezogen. Die hieraus berechnete Zinssatzdifferenz ist mit der Swapsatzdifferenz nahezu identisch“*; Stark/Loose (2007), S. 613 (Fn. 3).

Mit diesen Werten nimmt $E\left[\sum_{t=1}^{n}\frac{NZ_t^{Cap}}{1+r_t}\right]$ einen Betrag von –64.727 Euro an. Die Standardabweichung, d. h. $\sqrt{Var\left[\sum_{t=1}^{n}\frac{NZ_t^{Cap}}{1+r_t}\right]}$, liegt zwischen 161.411 Euro und 465.867 Euro.[30]

4.2 Beurteilung des Geschäfts anhand der entscheidungsrelevanten Kennzahlen

Stehen mehrere finanzwirtschaftliche Entscheidungsmöglichkeiten zur Auswahl und lassen sich die Erwartungswerte und Varianzen der aus den einzelnen Alternativen resultierenden Zahlungen ermitteln, so erlaubt das μ-σ-Prinzip eine Aussage darüber, welche Entscheidungsalternative zu wählen ist.[31]

Die nach dem μ-σ-Prinzip zu treffende Auswahl hängt von der Risikoeinstellung des Entscheidungsträgers ab.[32] Im Schrifttum wird dem kommunalen Bankkunden risikoscheues Verhalten unterstellt.[33] Diese Annahme ist sachgerecht und wird im Folgenden übernommen. Der risikoscheue Entscheidungsträger ist dadurch charakterisiert, dass er einen steigenden Erwartungswert begrüßt, eine steigende Streuung (Standardabweichung) hingegen möglichst vermeiden will. Weisen zwei Alternativen den gleichen Erwartungswert, aber unterschiedliche Streuungen auf, wählt er die Alternative mit der geringeren Standardabweichung. Muss er zwischen zwei Alternativen mit gleichen Streuungen, aber mit unterschiedlichen Erwartungswerten wählen, präferiert er die mit dem höheren Erwartungswert. Darüber hinaus gilt die Verknüpfung dieser beiden Präfernzreihungen; weist eine Alternative sowohl einen höhern Erwartungswert als auch eine geringere Standardabweichung auf, so wird sie bevorzugt.[34]

In dem hier vorliegendem Kontext geht es um eine Stand-Alone-Beurteilung eines CSL-Swaps. Der Entscheidungsträger kann ohne über seine Risikoeinstellung hinausgehenden Sachzwang – der etwa aus dem Vorliegen andere Risikopositionen, die mit dem CSL-Swap abzusichern wären, entstehen könnte – entscheiden, ob er das von seiner Bank angebotene Geschäft abschließen möchte oder nicht. Zu vergleichen sind daher die aus einer positiven Entscheidung resultierenden Kennzahlen „Erwartungswert“ und „Varianz“ mit den

[30] Vgl. zur Berechnung der Werte Anhang VI.
[31] Vgl. bspw. Perridon/Steiner/Rathgeber (2009), S. 108-113.
[32] Vgl. bspw. Perridon/Steiner/Rathgeber (2009), S. 108-113.
[33] Vgl. bspw. Beckers/Klatt (2008), S. 13-14 mit weiteren Nachweisen und bspw. die in OLG Bamberg vom 11. 5. 2009 – 4 U 92/08, S. 297-300 wiedergegebenen Äußerungen eines kommunalen Bankkundens, die deutlich auf – wenn auch nicht sonderlich stark ausgeprägte – Risikoaversion hindeuten.
[34] Vgl. bspw. Perridon/Steiner/Rathgeber (2009), S. 108-113.

Kennzahlen, die bei einer negativen Entscheidung vorliegen. Erwartungswert und Varianz, die aus einer Ablehnung des Geschäftsangebots folgen, weisen den Wert null auf. Wohingegen bei Annahme des Geschäfts ein Erwartungswert von -64.727 Euro und eine Standardabweichung von mindestens 161.411 Euro entsteht. Bei unabänderlicher Gültigkeit der errechneten Kennzahlen wäre das Geschäft von einem nicht risikofreudigen Entscheidungsträger also abzulehnen bzw. abzulehnen gewesen.

So eindeutig dieser Befund, so fraglich ist allerdings die unabänderbare Gültigkeit der Kennzahlen. Bedingt durch ihre Abhängigkeit von den Inputgrößen $\vec{\mu}$ und $\vec{\sigma}$, deren Ermittlung zwangsläufig immer ein subjektives Moment trägt, ist in praktischen Situationen die punktgenaue Ermittelbarkeit der Kennzahlen auszuschließen. Mithin bleibt zu eruieren, ob es zumindest möglich ist, die Kennzahlen auf plausible Wertbereiche einzugrenzen.

4.3 Sensitivität des Erwartungswerts auf Änderungen der Inputgrößen

Da die zur Bestimmung von $E\left[\sum_{t=1}^{n} \frac{NZ_t^{Cap}}{1+r_t}\right]$ und $\sqrt{Var\left[\sum_{t=1}^{n} \frac{NZ_t^{Cap}}{1+r_t}\right]}$ erforderlichen $\vec{\mu}$ und $\vec{\sigma}$ nur geschätzt, mithin also sachgerechterweise – wenn überhaupt – nur auf gewisse Bandbreiten eingegrenzt werden können, ist es für die Interpretation der Ergebnisse von entscheidender Bedeutung, wie sensitiv Erwartungswert und Standardabweichung auf Veränderungen von $\vec{\mu}$ und $\vec{\sigma}$ reagieren. Im Folgenden wird diese Fragestellung exemplarisch für die Kennzahl „Erwartungswert“ beleuchtet.

Bezugspunkt der Betrachtung ist nachstehende Überlegung: Derjenige, der einen CSL-Swap abschließt oder über den Abschluss eines CSL-Swaps nachdenkt, muss zwangsläufig eine Vorstellung darüber haben, mit welcher Entwicklung der Zinsstrukturkurve während der Geschäftslaufzeit zu rechnen ist. Ausgehend von dem bei Vertragsabschluss am Kapitalmarkt vorliegenden Spread sp_0 sind folgende drei Zinsmeinungen möglich:

1. Es wird eine Verringerung des Zinsspreads erwartet,
2. es wird erwartet, dass der Spread konstant bleibt,
3. es wird eine Ausdehnung des Spreads erwartet.

Zur Modellierung der Zinsmeinungen wird im Folgenden vereinfachend unterstellt, jede der drei Entwicklungen könne ausschließlich mit einem (nicht negativen, reellwertigen) konstanten Faktor α erfolgen. Konkret wird zweierlei vorausgesetzt: Zum einen, dass sich der Erwartungswert des Spreads, der ein halbes Jahr nach Vertragsabschluss eintritt, bestimmen lässt, indem sp_0 mit α multipliziert wird und zum anderen, dass der Quotient der Erwartungswerte zweier in halbjährigem Abstand auftretender Spreads α beträgt. Somit gilt:

$\mu_2 =$ Erwartungswert des zum Zeitpunkt 2 am Markt vorliegenden Spread
(1,5 Jahre nach Geschäftsabschluss)
$= \alpha^3 \cdot sp_0$

$\mu_3 =$ Erwartungswert des zum Zeitpunkt 2 am Markt vorliegenden Spreads
$+$ Erwartungswert des zum Zeitpunkt 3 am Markt vorliegenden Spreads
$= \alpha^3 \cdot sp_0 + \alpha \cdot \alpha^3 \cdot sp_0$

...

$\mu_9 = \left(\alpha^3 + \alpha^4 + ... + \alpha^{10}\right) \cdot sp_0$,

wobei Alpha kleiner 1 Zinsmeinung 1, Alpha gleich 1 Zinsmeinung 2 und Alpha größer 1 Zinsmeinung 3 verkörpert.

Neben der Vorstellung über den für die Entwicklung der Zinsstrukturkurve zu erwartenden Trend wird häufig auch eine Vorstellung bezüglich der Streuung der einzelnen Werte um den aus dem Trend resultierenden Erwartungswert anzunehmen sein. Zu trennen sind wieder drei mögliche Meinungen: 1. Die Streuung nimmt ab. 2. Die Streuung ändert sich nicht. 3. Die Streuung nimmt zu. Bezeichnet man mit $\vec{\sigma}^{Ver}$ die in der Vergangenheit zu beobachtenden Standardabweichungen und mit β einen reellwertigen positiven Faktor, kann man – sofern man analytisch vereinfachend unterstellt, dass sich das Verhältnis zwischen den einzelnen σ_t nicht ändert – mit $\vec{\sigma} := \beta \cdot \vec{\sigma}^{Ver}$ die einzelnen Vorstellungen modellieren. Wobei β kleiner 1 Vorstellung 1, β gleich 1 Vorstellung 2 und β größer 1 Vorstellung 3 verkörpert.

Setzt man nun für sp_0 den bei Vertragsabschluss gegebenen Spread[35] in Höhe von 0,0102 und für $\vec{\sigma}^{Ver}$ die oben aus der Stichprobe ermittelten historischen Standardabweichungen ein, also

$\vec{\sigma}^{Ver} = \left(0{,}00922;\ 0{,}01768;\ 0{,}02548;\ 0{,}03244;\ 0{,}03861;\ 0{,}04400;\ 0{,}04858;\ 0{,}05214\right)$,

ergibt sich der in Abbildung 3 dargestellte funktionale Zusammenhang zwischen Alpha, Beta und dem Erwartungswert des Barwerts der Nettozahlungen. Man erkennt, dass der Erwartungswert in Alpha streng monoton steigend und in Beta streng monoton fallend ist. Darüber hinaus zeigt sich, dass die Funktion für „mittlere" Alpha am stärksten auf Änderungen von

[35] Vgl. BGH vom 22. 3. 2011 – XI ZR 33/10, S. 294

Beta reagiert.[36] Im Weiteren zeigt sich, dass die Funktion – im Mittel – umso reagibler auf Alpha ist, je höher Beta ist.[37]

Bemerkenswert ist die relativ starke Reagibilität der Funktion auf Änderungen von Beta, insbesondere deshalb weil sie ausschließlich aus der die Kundenzinssätze i_t^K betreffenden Nichtnegativitätsklausel entspringt. Schlägt der Spread zu Ungunsten des Kunden aus, wirkt diese Entwicklung vollumfänglich auf die zu den einzelnen Zahlungszeitpunkten anfallenden Nettozahlungen, schlägt er jedoch zu Gunsten des Kunden aus, wirkt diese Entwicklung nur solange auf die zu einem Zahlungszeitpunkt anfallende Nettozahlung, bis sie die Höhe $K \cdot i^B$ erreicht hat. Diese Ungleichbehandlung führt dazu, dass der Erwartungswert des Barwerts der Nettozahlungen mit steigendem Beta sinkt. Würde die Nichtnegativitätsklausel aus dem Geschäft entfernt, wäre die Streuung der Spreads für den Erwartungswert gänzlich unerheblich.

Der betragsmäßig dominierende Aspekt ist jedoch die Änderung in Alpha. Abbildung 6 zeigt die Änderung des Erwartungswerts, die bei konstantem Beta durch eine Erhöhung von Alpha um 0,01 entsteht. Deutlich wird, dass bereits kleinste Änderungen von Alpha immense Änderungen des Erwartungswerts nach sich ziehen. Wird beispielsweise bei Beta gleich 1 Alpha von 1,02 auf 1,03 erhöht, ändert sich der Erwartungswert um 22.072 Euro. In Prozent ausgedrückt bedeutet dies, eine 0,98-prozentige Erhöhung von Alpha verursacht an dieser Stelle (Alpha gleich 1,02) eine 96-prozentige Erhöhung des Erwartungswerts. Die Änderung des Erwartungswerts beträgt mithin circa das 98-fache der Änderung von Alpha.

Ändern sich Alpha und Beta simultan, ist eine Verstärkung des Effekts möglich. Wird für Alpha 1,05 und Beta 0,95 unterstellt, ergibt sich ein Erwartungswert in Höhe von 98.387 Euro. Unterstellt man jedoch Alpha gleich 0,95 und Beta gleich 1,05 beträgt der Erwartungswert bereits -158.120 Euro.

[36] Vgl. etwa folgende aus Abbildung 5 ersichtliche Gegebenheiten: Für Alpha gleich 0,9 beträgt die durchschnittliche Steigung in Beta -257.710. Für Alpha gleich 1 beträgt die durchschnittliche Steigung in Beta -282.305. Für Alpha gleich 1,1 beträgt die durchschnittliche Steigung in Beta = -170.820.

[37] Vgl. etwa folgende aus Abbildung 4 ersichtliche Gegebenheiten: Für Beta gleich 0,9 beträgt die durchschnittliche Steigung in Alpha 2.075.775. Für Beta gleich 1 beträgt die durchschnittliche Steigung in Alpha 2.118.710. Für Beta gleich 1,1 beträgt die durchschnittliche Steigung in Alpha 2.162.665.

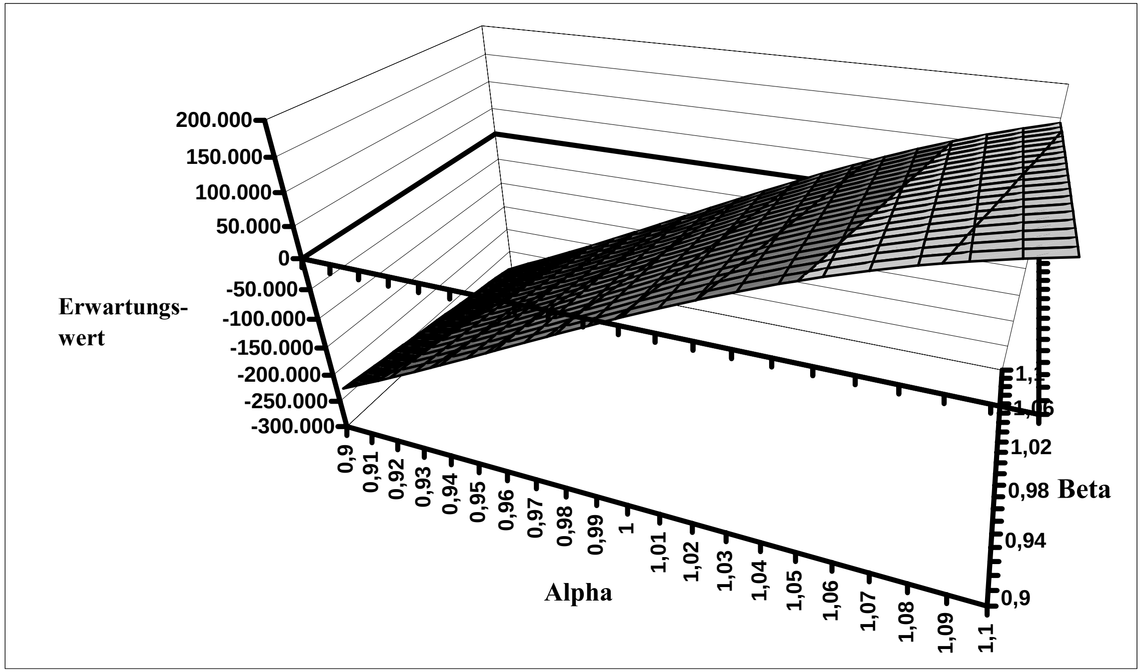

Abb. 3: Erwartungs. des Barw. der Nettozahl. in Abhängig. von $\bar{\mu}$ (Alpha) und $\bar{\sigma}$ (Beta) (eigene Darstel.)

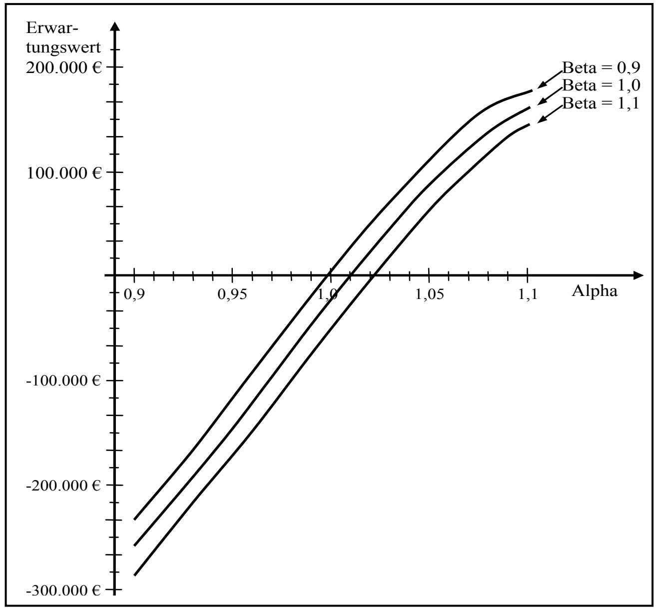

Abb. 4: Längsschnitte durch Abb. 2 (eigene Darstellung)

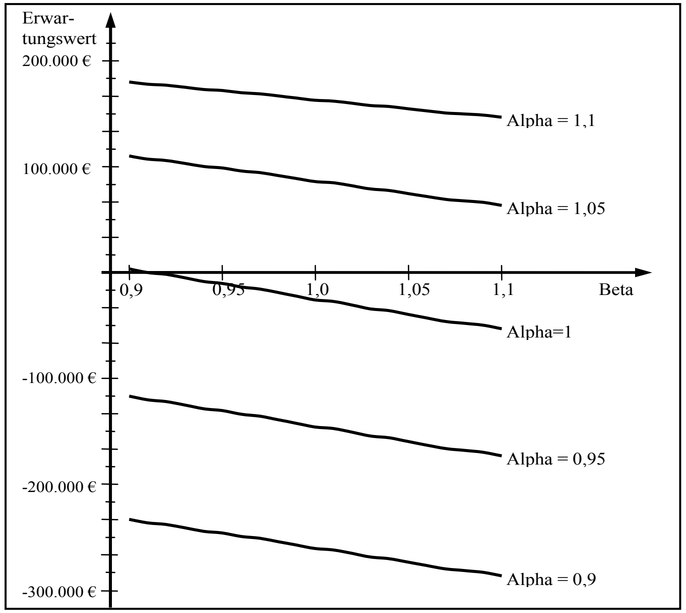

Abb. 5: Querschnitte durch Abb. 2 (eigene Darstellung)

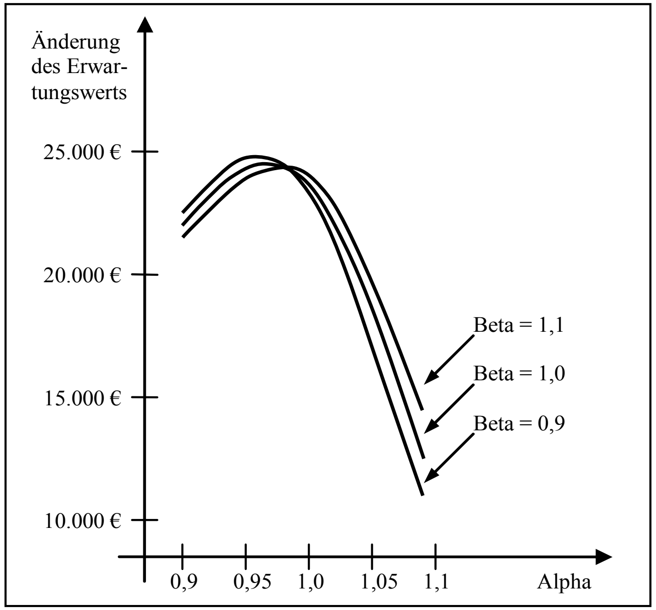

Abb. 6: Änderung des Erwartungswerts bei Änderung von Alpha um 0,01 (eigene Darstellung)

5 Implikation: CSL-Swaps als nicht rational beurteilbare Finanzgeschäfte

Im Zentrum des vorliegenden Beitrags steht die Frage nach der realökonomischen Beurteilbarkeit von CSL-Swaps. Nach bereits eingangs erwähnter gängiger wirtschaftswissenschaftlicher Methodik sind finanzwirtschaftliche Entscheidungsmöglichkeiten anhand des Erwartungswerts und der Varianz der aus ihnen resultierenden Zahlungen zu beurteilten. Hierbei gilt: Ist der Erwartungswert, der aus einem möglichen Geschäft resultierenden Zahlungen negativ, kommt es für den risikoaversen Entscheidungsträger auf die Varianz nicht mehr an. Das Geschäft ist bereits bei Kenntnis des negativen Erwartungswerts abzulehnen.[38] Zur rationalen Beurteilbarkeit eines CSL-Swaps ist es also als Ausgangspunkt jeder weiteren Überlegung zwingend erforderlich, feststellen zu können, ob der Erwartungswert des Geschäfts positiv oder negativ ist.

An diesem Erfordernis setzt die vorgenommene Betrachtung der Sensitivität der aus einem CSL-Swap zu erwartenden Nettozahlungen auf Änderungen der Inputgrößen „Erwartungswerte der während der Geschäftslaufzeit eintretenden Zinsdifferenzen ($\vec{\mu}$)“ und „standardisierte Streuung der Zinsdifferenzen um ihre Erwartungswerte ($\vec{\sigma}$)“ an. Die Sensitivität wird – soweit ersichtlich – erstmals nicht nur qualitativ beschrieben oder beispielhaft verdeutlicht,[39] sondern durch Angabe konkreter Zahlenwerte quantifiziert. Betrachtet man die errechneten Zahlenwerte, ist zu konzedieren, dass gerade im beurteilungsrelevanten Bereich, in dem der Erwartungswert nahe bei null liegt, eine extreme Reagibilität des Erwatungswerts auf Änderungen der Inputgrößen herrscht (stellenweise 98fache Änderung in Alpha). Will man also vermeiden, bei Beurteilung eines CSL-Swaps, (fälschlicherweise) von einem positiven Erwartungswert auszugehen, obwohl tatsächlich ein negativer Erwartungswert vorliegt, muss man sich verlässlich dazu in der Lage sehen, $\vec{\mu}$ und $\vec{\sigma}$ auf ganz enge Bandbreiten einzugrenzen. Sieht man sich hierzu, was ganz regelmäßig der Fall sein dürfte, nicht in der Lage, wird eine sachgerechte ökonomische Beurteilung eines CSL-Swaps schlicht unmöglich. Zumindest solange bis eine verlässliche Methodik zur sehr engen Eingrenzung von $\vec{\mu}$ und $\vec{\sigma}$ aufgezeigt wird, befindet sich derjenige, der ein solches Geschäft abschließt, im Blindflug.

Zum Ende der Betrachtung soll der Bogen zurück zum Ausgangspunkt geschlagen und Bezug zur Anhörung des Finanzausschusses des Deutschen Bundestags genommen werden. Dort wurde als Hauptursache der beobachteten Fehlentwicklung bei kommunalen CSL-Swaps die mangelnde Erkenntnismöglichkeit der kommunalen Bankkunden ausgemacht. Die Resultate

[38] Vgl. bspw. Perridon/Steiner/Rathgeber (2009), S. 108-113.
[39] Vgl. zur beispielhaften Verdeutlichung der Sensitivität bspw. Stark/Loose (2007), S. 610-618.

der vorliegenden Untersuchung weisen ebenfalls deutlich auf eine begrenzte Erkenntnismöglichkeit der Bankkunden hin.

Neben der rechtlichen Dimension des kommunalen Spekulationsverbotes, wonach die eindeutig als Spekulationsgeschäfte zu identifizierenden CSL-Swaps zu unterbinden sind, ergibt sich also auch – unabhängig vom Grundsatz des Spekulationsverbotes – eine ökonomisch-entscheidungstheoretische Dimension. Danach sind auch „rational handeln wollende Spekulanten“ gut beraten, die Finger von diesem Instrument zu lassen.

Da offenbar ein Großteil der Akteure auf kommunaler Seite die Nichteignung dieses Finanzproduktes nicht erkannt hat bzw. erkennt, spricht auch die ökonomisch-entscheidungstheoretische Betrachtung für ein Verbot von CSL-Swaps. Ein derartiges Verbot scheint nicht zwingend – wie derzeit diskutiert[40] – auf gesetzlicher Basis in den Gemeindeordnungen zu verankern zu sein. Eine Klarstellung in den einschlägigen Erlassen, Rundschreiben u. ä. der Innenministerien dürfte ausreichen.[41]

[40] Vgl. z. B. Staatsanzeiger für Baden-Württemberg v. 28.06.2012, Abgeordnete diskutieren über das Spekulationsverbot für Kommunen, URL: http://www.staatsanzeiger.de/politik-und-verwaltung/nachrichten/debatten-im-landtag/nachricht/artikel/abgeordnete-debattieren-ueber-das-spekulationsverbot-fuer-kommunen/, abgerufen am 21.08.2012.

[41] Es geht auch nicht um ein Verbot aller Derivate, die – wie einfache Zinsswaps – unter bestimmten Voraussetzungen durchaus nutzbringend für die Kommunen eingesetzt werden können.

Anhänge

Anhang I: Nachweis der Gültigkeit der geschlossenen Form der Formel zur Bestimmung des Zinssatzes i_t^K, für $t > 1$

In den CSL-Swap-Verträgen wird der vom Bankkunden zum Zeitpunkt t zu leistende Zinssatz regelmäßig rekursiv durch folgende Gleichung definiert:

$$i_t^K = \begin{cases} i_1^K, \text{ für } t = 1 \\ i_{t-1}^K + m \cdot \left[s_t - sp_t \right], \text{ für } t > 1 \end{cases}.$$

Zur weiteren Analyse ist es erforderlich, eine geschlossene Form dieser Bestimmungsgleichung anzugeben. Man erhält:

$$i_t^K = \begin{cases} i_1^K, \text{ für } t = 1 \\ i_1^K + m \cdot \left[\sum_{j=2}^{t} s_j \right] - m \cdot \left[\sum_{k=2}^{t} sp_k \right], \text{ für } t > 1 \end{cases}.$$

Die Korrektheit der geschlossenen Bestimmungsgleichung lässt sich durch vollständige Induktion zeigen:

Zu zeigen ist:

$$\forall t \in \{2; 3; \ldots n\} : i_t^K = i_1^K + m \cdot \left[\sum_{j=2}^{t} s_j \right] - m \cdot \left[\sum_{k=2}^{t} sp_k \right].$$

Vollständige Induktion[42]

1) Für t = 2 ist die Behauptung richtig, da

$$\begin{aligned} i_2^K &= i_{2-1}^K + m \cdot \left[s_2 - sp_2 \right] \\ &= i_1^K + m \cdot s_2 - m \cdot sp_2 \\ &= i_1^K + m \cdot \left[\sum_{j=2}^{2} s_j \right] - m \cdot \left[\sum_{k=2}^{2} sp_k \right] \end{aligned}$$

2) Gelte für ein $u \in \{2; 3; \ldots n-1\}$:

$$i_u^K = i_1^K + m \cdot \left[\sum_{j=2}^{u} s_j \right] - m \cdot \left[\sum_{k=2}^{u} sp_k \right]$$

[42] Vgl. zur Methodik bspw. Schindler (2002), S. 14-16.

3) Dann folgt für u+1:

$$
\begin{aligned}
i^K_{(u+1)} &= i^K_{(u+1)-1} + m\cdot\left[s_{u+1} - sp_{u+1}\right] \\
&= i^K_u + m\cdot\left[s_{u+1} - sp_{u+1}\right] \\
&\overset{2)}{=} i^K_1 + m\cdot\left[\sum_{j=2}^{u} s_j\right] - m\cdot\left[\sum_{k=2}^{u} sp_k\right] + m\cdot\left[s_{u+1} - sp_{u+1}\right] \\
&= i^K_1 + m\cdot\left[s_{u+1} + \sum_{j=2}^{u} s_j\right] - m\cdot\left[sp_{u+1} + \sum_{k=2}^{u} sp_k\right] \\
&= i^K_1 + m\cdot\left[\sum_{j=2}^{u+1} s_j\right] - m\cdot\left[\sum_{k=2}^{u+1} sp_k\right]
\end{aligned}
$$

■

Anhang II: Kolmogoroff-Smirnov-Anpassungstest (Lilliefors-Test)

1 Fragestellung

Für den Hauptteil ist die Frage relevant, ob die Grundgesamtheit der zu einzelnen Zeitpunkten auftretenden Wertdifferenzen zwischen dem 10-Jahres- und dem 2-Jahres-Zinssatz (Spreads) **normalverteilt** ist. Darüber hinaus interessiert die Frage, ob die Grundgesamtheit der Summenwerte, die sich ergeben, wenn zu dem Wert, den der Spread zu einem Zeitpunkt aufweist, der Wert hinzuaddiert wird, den der Spread ein halbes Jahr zuvor aufwies, ebenfalls normalverteilt ist. Letztlich interessiert die Frage, ob auch Normalverteilung vorliegt, wenn nicht nur die Summe aus zwei in einem zeitlichen Abstand von einem halben Jahr auftretenden Spreads, sondern die Summe aus 3, 4, 5, 6, 7 oder 8 jeweils in einem Abstand von einem halben Jahr auftretenden Spreads betrachtet wird.

Diese Fragestellungen werden mit Hilfe des Kolmogoroff-Smirnov-Anpassungstests – bzw. mit der als **Lilliefors-Test** bezeichneten Testvariante – auf Grundlage der zwischen November 1997 und Mai 2012 aufgetretenen Zinssatzdifferenzen (Spreads) behandelt. Die hierfür erforderlichen Kapitalmarktdaten werden aus von der Deutschen Bundesbank bereitgestellten Zeitreihen entnommen.[43]

2 Kolmogoroff-Smirnov-Anpassungstest (Lilliefors-Test)

2.1 Beschreibung der Methodik[44]

Der Kolmogoroff-Smirnov-Test wird verwendet, um – anhand einer $x_1,..., x_n$ Beobachtungen umfassenden Stichprobe – zu überprüfen, ob die unbekannte Verteilungsfunktion F(x) einer betrachteten Grundgesamtheit mit einer hypothetischen Verteilungsfunktion $F_0(x)$ übereinstimmt.[45]

Die Hypothese

H_0: $F(x) = F_0(x)$ für alle x

gegen die Alternative

[43] Es handelt sich um die Zeitreihe „WZ3409: Aus der Zinsstruktur abgeleitete Renditen für Bundeswertpapiere mit jährl. Kuponzahlung/RLZ 10 Jahre/Monatsendstand" und die Zeitreihe „WZ3401: Aus der Zinsstruktur abgeleitete Renditen für Bundeswertpapiere mit jährl. Kuponzahlung/RLZ 2 Jahre/Monatsendstand". Beide Zeitreihen sind im Internet abrufbar; URL: http://www.bundesbank.de/Navigation/DE/Statistiken/Zeitreihen_Datenbanken/Makrooekonomische_Zeitreihen/its_details_value_node.html?tsId=BBK01.WZ3409&listId=www_s140_it03b und http://www.bundesbank.de/Navigation/DE/Statistiken/Zeitreihen_Datenbanken/Makrooekonomische_Zeitreihen/its_details_value_node.html?tsId=BBK01.WZ3401&listId=www_s140_it03b

[44] Beschreibung des Testablaufs – weitgehend wörtlich – entnommen aus Hartung (1999), S. 183-189.

[45] Vorausgesetzt werden muss dabei, dass die hypothetische Verteilung stetig ist. Bei der hier vorgenommenen Untersuchung ist diese Voraussetzung erfüllt.

H_1: $F(x) \neq F_0(x)$ für wenigstens einen Wert von x

wird getestet mittels der Prüfgröße

$$\sqrt{n} \cdot D_n \text{, mit } D_n = \sup_x | F_0(x) - S_n(x) | ,$$

wobei $S_n(x)$ die empirische Verteilungsfunktion der Beobachtungen $x_1,..., x_n$ bezeichnet, d. h.

$$S_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{, falls } x < x_i \text{ für alle } x_i \text{ aus } x_1,..., x_n \\ \frac{k}{n} & \text{, falls } x \geq x_i \text{ für genau k Beobachtungen } x_i \text{ aus } x_1,..., x_n \\ 1 & \text{, falls } x \geq x_i \text{ für alle } x_i \text{ aus } x_1,..., x_n \end{cases}$$

Die Größe D_n gibt also den größten vertikalen Abstand zwischen hypothetischer und empirischer Verteilungsfunktion an. Intuitiv fassbar ist, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Stichprobe tatsächlich aus einer Grundgesamtheit stammt, die der hypothetischen Verteilungsfunktion unterliegt, mit steigendem D_n abnimmt.[46]

Die Hypothese H_0 wird nun zum Niveau α verworfen, wenn gilt:

$$\sqrt{n} \cdot D_n \geq d_{n;\,1-\alpha}$$

wobei die Quantile $d_{n;\,1-\alpha}$ aus statistischen Tabellen entnommen werden können.[47]

Diese Vorgehensweise gilt für alle (stetigen) Verteilungsfunktionen $F_0(x)$. Speziell im Falle einer $N(\mu_0, \sigma_0^2)$-Normalverteilung hat man $F_0(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu_0}{\sigma_0}\right)$, mit spezifizierten Werten μ_0 und σ_0^2. Dabei bezeichnet $\Phi(z)$ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung.

Interessiert man sich – **wie im Zuge der weiteren Betrachtung** – nicht für die Nullhypothese, dass die zugrundeliegende Gesamtheit einer speziellen $N(\mu_0, \sigma_0^2)$-Verteilung (mit spezifizierten Werten μ_0 und σ_0^2) entstammt, sondern für die Nullhypothese

H_0' : Die Verteilung der Grundgesamtheit ist eine Normalverteilung $N(\mu, \sigma^2)$ (mit nicht festgelegten μ und σ^2).

so ist die als **Lilliefors-Test** bezeichnete Variante des Kolmogoroff-Smirnov-Tests anzuwenden.

Bei dieser Testvariante wird μ durch $\bar{x}$ (= Stichprobenmittel) und σ^2 durch s^2 (= Stichprobenvarianz) aus der Stichprobe geschätzt.[48] Als Teststatistik wird – analog zu oben –

[46] Vgl. Schlittgen (1997), S. 392.

[47] Vgl. zu statistischen Details – insbesondere zur Gewinnung der Quantile $d_{n;\,1-\alpha}$ – bspw. Schlittgen (1997), S. 392.

$\sqrt{n} \cdot L_n^{norm}$, mit $L_n^{norm} = \sup_x | S_n(x) - \Phi\left(\frac{x - \bar{x}}{s}\right) |$ verwendet.

Die Verteilung von $\sqrt{n} \cdot L_n^{norm}$ hängt nicht von den unbekannten Parametern μ und σ^2 ab. Im Schrifttum sind die Quantile $l_{n;1-\alpha}^{norm}$ der Verteilung von $\sqrt{n} \cdot L_n^{norm}$ – die nicht mit den oben genannten $d_{n;1-\alpha}$ übereinstimmen – zu finden.[49] Tabelle 1 beinhaltet die je nach Stichprobenumfang n und Signifikanzniveau α heranzuziehenden kritischen Werte.

H_0' wird zum Signifikanzniveau α verworfen, wenn gilt:

$$\sqrt{n} \cdot L_n^{norm} \geq l_{n;1-\alpha}^{norm}$$

n	= 30	> 30
$l_{n;0,80}^{norm}$	0,718	0,736
$l_{n;0,85}^{norm}$	0,745	0,768
$l_{n;0,90}^{norm}$	0,789	0,805
$l_{n;0,95}^{norm}$	0,882	0,886
$l_{n;0,99}^{norm}$	1,024	1,031

Tabelle 1: Kritische Werte $l_{n;1-\alpha}^{norm}$ zum Test auf nicht spezifizierte Normalverteilung (für n = 30 und für n > 30)[50]

2.2 Anwendung der Methodik für die Grundgesamtheit der Spreads (n = 30)

In diesem Abschnitt wird die Nullhypothese

H_0': Die Grundgesamtheit der in halbjährigem Abstand auftretenden Wertdifferenzen (Spreads) zwischen dem 10-Jahres- und dem 2-Jahres-Zinssatz ist **normalverteilt** (mit nicht festgelegten μ und σ^2)

getestet.

Als Stichprobe werden die zwischen November 1997 und Mai 2012 aufgetretenen Zinssatzdifferenzen, genauer die im Mai und die im November dieser Jahre aufgetretenen Spreads, herangezogen. Es ergeben sich mithin 30 Einzelwerte, d. h. n = 30.

Bei der Festlegung des Betrachtungszeitraums wurden zwei Punkte berücksichtigt. Zum einen wurde der Zeitraum so weit ausgedehnt, dass die Anzahl der in die Betrachtung eingehenden

---

[48] Vgl. zur Definition der Größen „Stichprobenmittel“ und „Stichprobenvarianz“ bspw. Bamberg/Baur/Krapp (2007), Statistik, 13. Aufl., München, S. 139.
[49] Vgl. zur Ermittlung der Quantile Lilliefors (1967), S. 399-402.
[50] Erstmals bestimmt von Lilliefors. Werte entnommen aus Lilliefors (1967), S. 399-402. Vgl. zur Gültigkeit der – hier wiedergegebenen – Werte bspw. Graf u. a. (1998), S. 133.

Spreads nicht zu klein wird – soweit ersichtlich herrscht im Schrifttum Einigkeit, dass n = 30 hinreichend groß ist, um mit dem Kolmogoroff-Smirnov-Anpassungstest (**Lilliefors-Test**) zu belastbaren Ergebnissen zu kommen.[51] Zum anderen wurde der Zeitraum so klein gehalten, dass zeitlich (sehr) weit zurückliegende Spreads nicht in die Betrachtung einzubeziehen waren. Dies wird als notwendig erachtet, weil grundsätzlich davon ausgegangen wird, dass der Aussagegehalt einer empirischen Beobachtung mit steigendem zeitlichen Abstand vom jeweils relevanten Betrachtungszeitpunkt (tendenziell) abnimmt.

Der Tatsache, dass es für notwendig erachtet wird, den Betrachtungszeitraum nicht zu weit in die Vergangenheit auszudehnen und der damit zwangsläufig einhergehenden Begrenzung des Stichprobenumfangs, ist es auch geschuldet, dass bei der Auswahl eines geeigneten Anpassungstests der Kolmogoroff-Smirnov- und nicht etwa der ebenfalls in der Praxis weit verbreitete Chi-Quadrat-Anpassungstest zum Zug kam. Der Chi-Quadrat-Anpassungstest erfordert einen Stichprobenumfang von mindestens 200 Beobachtungen[52], während der Kolmogoroff-Smirnov-Test bereits bei deutlich kleineren Stichprobenumfängen angewandt werden kann.[53]

Die Ausgangsdaten und Zwischenwerte des Tests sind in Tabelle 2 enthalten. Spalte 5 der Tabelle beinhaltet die konkreten Stichprobenwerte. Die zur Berechnung der Werte erforderlichen 10-Jahres und 2-Jahres-Zinssätze sind in den Spalten 3 und 4 dargestellt. Sie entstammen Zeitreihen, die von der Deutschen Bundesbank bereitgestellt werden.[54]

Die in Spalte 16 enthaltene Größe $\sqrt{n} \cdot L_n^{norm}$ lässt sich mit den übrigen in der Tabelle enthaltenen Zwischenwerten ganz analog zur oben (Abschnitt 2.1) beschriebenen Vorgehensweise berechnen, indem das – in Spalte 14 Zeile 6 – zu findende $\sup_x |S_n(x) - \Phi\left(\frac{x-\bar{x}}{s}\right)|$ in Höhe von 0,0884232335 mit der Wurzel aus dem Stichprobenumfang (Wurzel aus 30) multipliziert wird. Es ergibt sich $\sqrt{n} \cdot L_n^{norm} = 0{,}4843139958$. Vergleicht man den Wert von $\sqrt{n} \cdot L_n^{norm}$ mit

---

51 Vgl. bspw. Büning/Trenkler (1994), S. 68-73 oder Schlittgen (1997), S. 393.

52 Vgl. Hafner (2000), S. 165.

53 Vgl. bspw. Lilliefors, Hubert W. (1967), S. 399 und Büning/Trenkler, die ausführen: *„Der K-S-Test ist unter den Anpassungstests bei Vorlage ungruppierter Daten und für kleine Stichprobenumfänge der wohl gebräuchlichste Test.“* Büning/Trenkler (1994), S. 73.

54 Es handelt sich um die Zeitreihe „WZ3409: Aus der Zinsstruktur abgeleitete Renditen für Bundeswertpapiere mit jährl. Kuponzahlung/RLZ 10 Jahre/Monatsendstand“ und die Zeitreihe „WZ3401: Aus der Zinsstruktur abgeleitete Renditen für Bundeswertpapiere mit jährl. Kuponzahlung/RLZ 2 Jahre/Monatsendstand“. Beide Zeitreihen sind im Internet abrufbar; URL: http://www.bundesbank.de/Navigation/DE/Statistiken/Zeitreihen_Datenbanken/Makrooekonomische_Zeitreihen/its_details_value_node.html?tsId=BBK01.WZ3409&listId=www_s140_it03b und http://www.bundesbank.de/Navigation/DE/Statistiken/Zeitreihen_Datenbanken/Makrooekonomische_Zeitreihen/its_details_value_node.html?tsId=BBK01.WZ3401&listId=www_s140_it03b

den in Tabelle 1 enthaltenen kritischen Werten $l^{norm}_{30;\,1-\alpha}$, erkennt man, dass die Nullhypothese zu keinem Signifikanzniveau $\alpha \leq 0{,}2$ verworfen werden kann.

Ergebnis: **Die Stichprobe enthält – für Signifikanzniveaus $\alpha \leq 0{,}20$ – keinen signifikanten Hinweis auf Nichtnormalität der betrachteten Grundgesamtheit.**[55]
Anders formuliert lautet das Ergebnis: Selbst wenn man bereit ist, mit zwanzigprozentiger Wahrscheinlichkeit ein Fehlurteil abzugeben, kann man an Hand der gegebenen Stichprobe nicht die Aussage aufstellen, die Grundgesamtheit sei nicht normalverteilt.

[55] Formulierung in Anlehnung an Hafner (2000), S. 168.

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII	XIV	XV	XVI
Laufende Nummer	**Zeitpunkt** (Jahr-Monat)	**10-Jahres-Zins** (in %)	**2-Jahres-Zins** (in %)	**Spread (Stichprobe** - sortiert nach zeitlichem Auftreten)	**Stichprobenmittel** ($\overline{x}$)	**Quadrierte Differenz zwischen Spread und Stichprobenmittel (V-VI)^2**	**Stichprobenvarianz (s^2)**	**Wurzel der Stichprobenvarianz (s)**	**Spread** (Spalte V nach Größe sortiert) **(x_i)**	**Anzahl** (reine Hilfsgröße)	**$S_n(x_i)$**	$\Phi\left(\frac{x_i-\overline{x}}{s}\right)$	$\lvert S_n(x_i)-\Phi\left(\frac{x_i-\overline{x}}{s}\right)\rvert$	$L_n^{norm} = \sup_{x_i} \lvert S_n(x_i)-\Phi\left(\frac{x_i-\overline{x}}{s}\right)\rvert$	$\sqrt{n}\cdot L_n^{norm}$
1	2012-05	1,34	0,01	0,0133	0,0115300000	0,0000031329	0,0000423760	0,0065096824	0,0005	1	0,0333	0,0451	0,0117614030	0,0884232335	**0,4843139958**
2	2011-11	2,40	0,39	0,0201		0,0000734449			0,0008	2	0,0667	0,0496	0,0170225289		
3	2011-05	3,12	1,66	0,0146		0,0000094249			0,0020	3	0,1000	0,0716	0,0283993511		
4	2010-11	2,81	0,88	0,0193		0,0000603729			0,0021	4	0,1333	0,0737	0,0596102612		
5	2010-05	2,77	0,49	0,0228		0,0001270129			0,0033	5	0,1667	0,1031	0,0636002040		
6	2009-11	3,28	1,27	0,0201		0,0000734449			0,0036	6	0,2000	0,1116	**0,0884232335**		
7	2009-05	3,78	1,40	0,0238		0,0001505529			0,0057	7	0,2333	0,1852	0,0480971773		
8	2008-11	3,44	2,13	0,0131		0,0000024649			0,0066	8	0,2667	0,2244	0,0422415967		
9	2008-05	4,52	4,32	0,0020		0,0000908209			0,0082	9	0,3000	0,3045	0,0044845017		
10	2007-11	4,17	3,81	0,0036		0,0000628849			0,0084	10	0,3333	0,3153	0,0180119070		
11	2007-05	4,44	4,39	0,0005		0,0001216609			0,0093	11	0,3667	0,3660	0,0007044130		
12	2006-11	3,76	3,68	0,0008		0,0001151329			0,0097	12	0,4000	0,3893	0,0106907055		
13	2006-05	3,98	3,41	0,0057		0,0000339889			0,0108	13	0,4333	0,4554	0,0220226112		
14	2005-11	3,44	2,78	0,0066		0,0000243049			0,0114	14	0,4667	0,4920	0,0253668849		
15	2005-05	3,29	2,21	0,0108		0,0000005329			0,0125	15	Zweimaliges Auftreten gleicher Werte in der Stichp.[56]				
16	2004-11	3,80	2,41	0,0139		0,0000056169			0,0125	16	0,5333	0,5592	0,0258933240		
17	2004-05	4,36	2,67	0,0169		0,0000288369			0,0131	17	0,5667	0,5953	0,0286252175		
18	2003-11	4,48	2,85	0,0163		0,0000227529			0,0133	18	0,6000	0,6072	0,0071515687		
19	2003-05	3,78	2,16	0,0162		0,0000218089			0,0137	19	0,6333	0,6306	0,0027685370		
20	2002-11	4,59	3,15	0,0144		0,0000082369			0,0139	20	0,6667	0,6421	0,0245683937		
21	2002-05	5,19	4,26	0,0093		0,0000049729			0,0144	21	0,7000	0,6704	0,0296493136		
22	2001-11	4,68	3,43	0,0125		0,0000009409			0,0146	22	0,7333	0,6814	0,0519376455		
23	2001-05	5,25	4,41	0,0084		0,0000097969			0,0162	23	0,7667	0,7634	0,0032325147		
24	2000-11	5,11	4,90	0,0021		0,0000889249			0,0163	24	0,8000	0,7681	0,0318540465		
25	2000-05	5,34	5,01	0,0033		0,0000677329			0,0169	25	0,8333	0,7953	0,0380404102		
26	1999-11	5,24	4,10	0,0114		0,0000000169			0,0193	26	0,8667	0,8837	0,0170173900		
27	1999-05	4,21	2,84	0,0137		0,0000047089			0,0201	27	Zweimaliges Auftreten gleicher Werte in der Stichp.				
28	1998-11	4,13	3,31	0,0082		0,0000110889			0,0201	28	0,9333	0,9060	0,0273363936		
29	1998-05	4,99	4,02	0,0097		0,0000033489			0,0228	29	0,9667	0,9583	0,0083687219		
30	1997-11	5,58	4,33	0,0125		0,0000009409			0,0238	30	1,0000	0,9703	0,0297227118		

Tabelle 2: Werte des Kolmogoroff-Smirnov-Anpassungstests für die Grundgesamtheit der Spreads (n = 30)

[56] Vgl. zur Behandlung von Bindungen im Detail bspw. Büning/Trenkler (1978), S. 89.

2.3 Anwendung der Methodik für die Grundgesamtheit der Summenwerte, die sich bei Addition zweier in halbjährigem Abstand auftretender Spreadwerte ergeben (mit einem Strichprobenumfang von n = 30)

In diesem Abschnitt wird die Nullhypothese

> H_0': Die Verteilung der Grundgesamtheit der Summenwerte, die sich bei Addition zweier in halbjährigem Abstand auftretender Spreadwerte ergeben, ist eine Normalverteilung $N(\mu, \sigma^2)$ (mit nicht festgelegten μ und σ^2)

getestet.

Die bereits in Abschnitt 2.2 herangezogen Ausgangsdaten (2-Jahres- und 10-Jahres-Zinssätze) werden um die im Mai 1997 beobachteten Zinssätze ergänzt (siehe Tabelle 3 Zeile 31 Spalten 1-4). Aus den Ausgangsdaten werden die zwischen Mai 1997 und Mai 2012 aufgetretenen Zinssatzdifferenzen, genauer die im Mai und die im November eines jeden dieser Jahre aufgetretenen Spreads, berechnet (siehe Tabelle Spalte 5). Die sich ergebenden 31 Einzelwerte werden anschließend paarweise addiert, d. h. zu dem im Mai 1997 aufgetretenen Wert wird der im November 1997 aufgetretene Wert hinzuaddiert, zu dem im November 1997 aufgetretenen Wert wird der im Mai 1998 aufgetretene Wert hinzuaddiert usw. (siehe Tabelle 3 Spalte VI). Die sich ergebenden 30 Summenwerte bilden die Stichprobe, d. h. n = 30.

Ansonsten wird vollständig analog zu oben verfahren. Für $\sqrt{n} \cdot L_n^{norm}$ ergibt sich ein Wert von 0,4809943376. Vergleicht man diesen Wert mit den in Tabelle 1 enthaltenen kritischen Werten $l_{30;\,1-\alpha}^{norm}$, erkennt man, dass die Nullhypothese zu keinem Signifikanzniveau $\alpha \leq 0{,}2$ verworfen werden kann.

Ergebnis: **Die Stichprobe enthält – für Signifikanzniveaus $\alpha \leq 0{,}20$ – keinen signifikanten Hinweis auf Nichtnormalität der betrachteten Grundgesamtheit.**[57]

Anders formuliert lautet das Ergebnis: Selbst wenn man bereit ist, mit zwanzigprozentiger Wahrscheinlichkeit ein Fehlurteil abzugeben, kann man an Hand der gegebenen Stichprobe nicht die Aussage aufstellen, die Grundgesamtheit sei nicht normalverteilt.

---

[57] Formulierung in Anlehnung an Hafner (2000), S. 168.

Lfd. Nr.	II Zeitpunkt (Jahr-Monat)	III 10-Jahres-Zins (in %)	IV 2-Jahres-Zins (in %)	V Spread (sortiert nach zeitlichem Auftreten)	VI Summe aus zwei Spreads (Stichprobe)	VII Stichproben-mittel ($\bar{x}$)	VIII Quadrierte Differenz zwischen Summe aus Spreads und Stichproben-mittel $(VI-VII)^2$	IX Stichpro-benvarianz (s^2)	X Wurzel der Stichproben-varianz (s)	XI Summe aus zwei Spreads (Spalte VI nach Größe sortiert) (x_i)	XII Anzahl (reine Hilfsgröße)	XIII $S_n(x_i)$	XIV $\Phi\left(\frac{x_i-\bar{x}}{s}\right)$	XV $\lvert S_n(x_i)-\Phi\left(\frac{x_i-\bar{x}}{s}\right)\rvert$	XVI $L_n^{norm} = \sup_{x_i} \lvert S_n(x_i)-\Phi\left(\frac{x_i-\bar{x}}{s}\right)\rvert$	XVII $\sqrt{n}\cdot L_n^{norm}$
1	2012-05	1,34	0,01	0,0133	0,0334	0,0233766667	0,0001004672	0,0001518067	0,0123209853	0,0013000000	1	0,0333333333	0,0365829905	0,0032496572	0,0878171496	0,4809943376
2	2011-11	2,40	0,39	0,0201	0,0347		0,0001282179			0,0041000000	2	0,0666666667	0,0588454762	0,0078211905		
3	2011-05	3,12	1,66	0,0146	0,0339		0,0001107405			0,0054000000	3	0,1000000000	0,0722786542	0,0277213458		
4	2010-11	2,81	0,88	0,0193	0,0421		0,0003505632			0,0056000000	4	0,1333333333	0,0745389915	0,0587943418		
5	2010-05	2,77	0,49	0,0228	0,0429		0,0003811605			0,0065000000	5	0,1666666667	0,0853825144	0,0812841523		
6	2009-11	3,28	1,27	0,0201	0,0439		0,0004212072			0,0105000000	6	0,2000000000	0,1479882841	0,0520117159		
7	2009-05	3,78	1,40	0,0238	0,0369		0,0001828805			0,0123000000	7	0,2333333333	0,1843241492	0,0490091841		
8	2008-11	3,44	2,13	0,0131	0,0151		0,0000685032			0,0147000000	8	0,2666666667	0,2406483332	0,0260183335		
9	2008-05	4,52	4,32	0,0020	0,0056		0,0003160099			0,0151000000	9	0,3000000000	0,2508702745	0,0491297255		
10	2007-11	4,17	3,81	0,0036	0,0041		0,0003715899			0,0174000000	10	0,3333333333	0,3138097092	0,0195236242		
11	2007-05	4,44	4,39	0,0005	0,0013		0,0004873792			0,0179000000	11	0,3666666667	0,3283408956	0,0383257711		
12	2006-11	3,76	3,68	0,0008	0,0065		0,0002848219			0,0209000000	12	0,4000000000	0,4203445709	0,0203445709		
13	2006-05	3,98	3,41	0,0057	0,0123		0,0001226925			0,0218000000	13	0,4333333333	0,4490879571	0,0157546238		
14	2005-11	3,44	2,78	0,0066	0,0174		0,0000357205			0,0219000000	14	0,4666666667	0,4523010964	0,0143655702		
15	2005-05	3,29	2,21	0,0108	0,0247		0,0000017512			0,0222000000	15	0,5000000000	0,4619584399	0,0380415601		
16	2004-11	3,80	2,41	0,0139	0,0308		0,0000551059			0,0237000000	16	0,5333333333	0,5104680373	0,0228652960		
17	2004-05	4,36	2,67	0,0169	0,0332		0,0000964979			0,0247000000	17	0,5666666667	0,5427660887	0,0239005780		
18	2003-11	4,48	2,85	0,0163	0,0325		0,0000832352			0,0251000000	18	0,6000000000	0,5556185554	0,0443814446		
19	2003-05	3,78	2,16	0,0162	0,0306		0,0000521765			0,0306000000	19	0,6333333333	0,7211504829	**0,0878171496**		
20	2002-11	4,59	3,15	0,0144	0,0237		0,0000001045			0,0308000000	20	0,6666666667	0,7265776902	0,0599110235		
21	2002-05	5,19	4,26	0,0093	0,0218		0,0000024859			0,0325000000	21	0,7000000000	0,7704929000	0,0704929000		
22	2001-11	4,68	3,43	0,0125	0,0209		0,0000061339			0,0332000000	22	0,7333333333	0,7873571546	0,0540238213		
23	2001-05	5,25	4,41	0,0084	0,0105		0,0001658085			0,0334000000	23	0,7666666667	0,7920392030	0,0253725363		
24	2000-11	5,11	4,90	0,0021	0,0054		0,0003231605			0,0339000000	24	0,8000000000	0,8034747541	0,0034747541		
25	2000-05	5,34	5,01	0,0033	0,0147		0,0000752845			0,0347000000	25	0,8333333333	0,8209595976	0,0123737357		
26	1999-11	5,24	4,10	0,0114	0,0251		0,0000029699			0,0353000000	26	0,8666666667	0,8334092947	0,0332573719		
27	1999-05	4,21	2,84	0,0137	0,0219		0,0000021805			0,0369000000	27	0,9000000000	0,8638072106	0,0361927894		
28	1998-11	4,13	3,31	0,0082	0,0179		0,0000299939			0,0421000000	28	0,9333333333	0,9356979468	0,0023646135		
29	1998-05	4,99	4,02	0,0097	0,0222		0,0000013845			0,0429000000	29	0,9666666667	0,9434667649	0,0231999017		
30	1997-11	5,58	4,33	0,0125	0,0353		0,0001421659			0,0439000000	30	1,0000000000	0,9521155775	0,0478844225		
31	1997-05	5,99	3,71	0,0228												

Tabelle 3: Werte des Kolmogoroff-Smirnov-Anpassungstests für die Grundgesamtheit der Summenwerte aus zwei Spreads (n = 30)

2.4 Gesamtergebnis und Betrachtung der Grundgesamtheit der Summenwerte, die sich bei Addition mehrer (3 bis 8) in halbjährigem Abstand auftretender Spreadwerte ergeben

Zu den beiden bereits beschriebenen Tests analoge Tests wurden – mit den gleichen Ausgangsdaten[58] – auch für die Grundgesamtheiten der Summenwerte durchgeführt, die sich ergeben, wenn 3, 4, 5, 6, 7 oder 8 jeweils in einem Abstand von einem halben Jahr auftretende Spreads addiert werden. Wegen der bestehenden Analogie wird auf eine (nochmalige) Beschreibung des Testablaufs und eine (nochmalige) Wiedergabe der errechneten Zwischenwerte verzichtet. Die getesteten Nullhypothesen und die Testergebnisse beinhaltet Tabelle 4. Zur Vollständigkeit sind auch die Ergebnisse der beiden bereits in den vorangehenden Abschnitten beschriebenen Tests nochmals in Tabelle 4 enthalten.

Als Gesamtergebnis zeigt sich, dass mit dem vorliegenden Datenmaterial die Annahme, dass die betrachteten Grundgesamtheiten normalverteilt sind, selbst dann nicht verworfen werden kann, wenn man bereit ist, beim Verwerfen der Annahme eine Fehlerwahrscheinlichkeit von 20 Prozent in Kauf zu nehmen.

=> Die Annahme, dass die betrachteten Grundgesamtheiten normalverteilt sind, ist statistisch abgesichert.

[58] Zur Exaktheit sei gesagt, dass die Ausgangsdaten von Test zu Test jeweils um einen Spreadwert erweitert wurden, damit der Umfang der jeweiligen Stichproben der betrachteten Summenwerte konstant auf dreißig gehalten werden konnte.

Nullhypothese	$\sqrt{30} \cdot L_{30}^{norm}$	$l_{30;\,0,80}^{norm}$	$l_{30;\,0,90}^{norm}$	$l_{30;\,0,95}^{norm}$	Ergebnis
Die Verteilung der Grundgesamtheit der Spreads ist eine Normalverteilung N(μ, σ^2) (mit nicht festgelegten μ und σ^2)	0,48431	0,718	0,789	0,882	Die Stichprobe enthält – für Signifikanzniveaus **α ≤ 0,20 – keinen signifikanten Hinweis auf Nichtnormalität** der betrachteten Grundgesamtheit.
Die Verteilung der Grundgesamtheit der Summenwerte, die sich bei Addition **zweier** in halbjährigem Abstand auftretender Spreadwerte ergeben, ist eine Normalverteilung N(μ, σ^2) (mit nicht festgelegten μ und σ^2)	0,48099	0,718	0,789	0,882	Die Stichprobe enthält – für Signifikanzniveaus **α ≤ 0,20** – **keinen signifikanten Hinweis auf Nichtnormalität** der betrachteten Grundgesamtheit.
Die Verteilung der Grundgesamtheit der Summenwerte, die sich bei Addition **dreier** jeweils in halbjährigem Abstand auftretender Spreadwerte ergeben, ist eine Normalverteilung N(μ, σ^2) (mit nicht festgelegten μ und σ^2)	0,33962	0,718	0,789	0,882	Die Stichprobe enthält – für Signifikanzniveaus **α ≤ 0,20 – keinen signifikanten Hinweis auf Nichtnormalität** der betrachteten Grundgesamtheit.
Die Verteilung der Grundgesamtheit der Summenwerte, die sich bei Addition **vierer** jeweils in halbjährigem Abstand auftretender Spreadwerte ergeben, ist eine Normalverteilung N(μ, σ^2) (mit nicht festgelegten μ und σ^2)	0,34467	0,718	0,789	0,882	Die Stichprobe enthält – für Signifikanzniveaus **α ≤ 0,20 – keinen signifikanten Hinweis auf Nichtnormalität** der betrachteten Grundgesamtheit.
Die Verteilung der Grundgesamtheit der Summenwerte, die sich bei Addition **fünfer** jeweils in halbjährigem Abstand auftretender Spreadwerte ergeben, ist eine Normalverteilung N(μ, σ^2) (mit nicht festgelegten μ und σ^2)	0,50495	0,718	0,789	0,882	Die Stichprobe enthält – für Signifikanzniveaus **α ≤ 0,20 – keinen signifikanten Hinweis auf Nichtnormalität** der betrachteten Grundgesamtheit.
Die Verteilung der Grundgesamtheit der Summenwerte, die sich bei Addition **sechser** jeweils in halbjährigem Abstand auftretender Spreadwerte ergeben, ist eine Normalverteilung N(μ, σ^2) (mit nicht festgelegten μ und σ^2)	0,50874	0,718	0,789	0,882	Die Stichprobe enthält – für Signifikanzniveaus **α ≤ 0,20 – keinen signifikanten Hinweis auf Nichtnormalität** der betrachteten Grundgesamtheit.
Die Verteilung der Grundgesamtheit der Summenwerte, die sich bei Addition **siebener** jeweils in halbjährigem Abstand auftretender Spreadwerte ergeben, ist eine Normalverteilung N(μ, σ^2) (mit nicht festgelegten μ und σ^2)	0,64616	0,718	0,789	0,882	Die Stichprobe enthält – für Signifikanzniveaus **α ≤ 0,20 – keinen signifikanten Hinweis auf Nichtnormalität** der betrachteten Grundgesamtheit.
Die Verteilung der Grundgesamtheit der Summenwerte, die sich bei Addition **achter** jeweils in halbjährigem Abstand auftretender Spreadwerte ergeben, ist eine Normalverteilung N(μ, σ^2) (mit nicht festgelegten μ und σ^2)	0,59985	0,718	0,789	0,882	Die Stichprobe enthält – für Signifikanzniveaus **α ≤ 0,20 – keinen signifikanten Hinweis auf Nichtnormalität** der betrachteten Grundgesamtheit.

Tabelle 4: Ergebnisübersicht Kolmogoroff-Smirnov-Anpassungstest (n = 30)

Anhang III: Berechnung des Erwartungswerts von $\mathbf{NZ_t^{Cap}}$

Mit der Funktion c:

$c: \mathrm{IR} \rightarrow \mathrm{IR}$

$$c(u)=\begin{cases} K\cdot i^B - K\cdot i_1^K - K\cdot m\cdot\left(\sum\limits_{j=2}^{t} s_j\right) + K\cdot m\cdot u & \text{, für } u \le \dfrac{i_1^K}{m}+\sum\limits_{j=2}^{t} s_j \\ K\cdot i^B & \text{, für } u > \dfrac{i_1^K}{m}+\sum\limits_{j=2}^{t} s_j \end{cases}$$

und der mit den Parametern μ_t und σ_t^2 normalverteilten Zufallsvariablen $S'P_t^{Sum} := \sum\limits_{w=2}^{t} SP'_w$ gilt – unter Verwendung der Notationen $f_{N(\mu,\sigma)}$ und $F_{N(\mu,\sigma)}$ für die Dichte- und Verteilungsfunktion einer mit den Parametern μ und σ^2 normalverteilten Zufallsvariablen – für $E\left(NZ_t^{Cap}\right)$ Folgendes:

$$E\left(NZ_t^{Cap}\right) \overset{(1)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} c(y)\cdot f_{N(\mu_t,\sigma_t)}(y)dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\frac{i_1^K}{m}+\sum_{j=2}^{t} s_j} \left(K\cdot i^B - K\cdot i_1^K - K\cdot m\cdot\left(\sum_{j=2}^{t} s_j\right) + K\cdot m\cdot y\right)\cdot f_{N(\mu_t,\sigma_t)}(y)dy + \int_{\frac{i_1^K}{m}+\sum_{j=2}^{t} s_j}^{\infty} K\cdot i^B\cdot f_{N(\mu_t,\sigma_t)}(y)dy$$

$$= \left(K\cdot i^B - K\cdot i_1^K - K\cdot m\cdot\sum_{j=2}^{t} s_j\right)\cdot F_{N(\mu_t,\sigma_t)}\left(\frac{i_1^K}{m}+\sum_{j=2}^{t} s_j\right) + K\cdot m\cdot \int_{-\infty}^{\frac{i_1^K}{m}+\sum_{j=2}^{t} s_j} y\cdot f_{N(\mu_t,\sigma_t)}(y)dy + K\cdot i^B\cdot\left(1-F_{N(\mu_t,\sigma_t)}\left(\frac{i_1^K}{m}+\sum_{j=2}^{t} s_j\right)\right)$$

$$= K\cdot i^B - \left(K\cdot i_1^K + K\cdot m\cdot\sum_{j=2}^{t} s_j\right)\cdot F_{N(\mu_t,\sigma_t)}\left(\frac{i_1^K}{m}+\sum_{j=2}^{t} s_j\right) + K\cdot m\cdot \int_{-\infty}^{\frac{i_1^K}{m}+\sum_{j=2}^{t} s_j} y\cdot f_{N(\mu_t,\sigma_t)}(y)dy$$

$$\overset{(2)}{=} K\cdot i^B - \left(K\cdot i_1^K + K\cdot m\cdot\sum_{j=2}^{t} s_j\right)\cdot F_{N(\mu_t,\sigma_t)}\left(\frac{i_1^K}{m}+\sum_{j=2}^{t} s_j\right) + K\cdot m\cdot\left\{\mu_t\cdot F_{N(0,1)}\left(\frac{i_1^K + m\cdot\left(\sum_{j=2}^{t} s_j\right) - m\cdot\mu_t}{m\cdot\sigma_t}\right) - \frac{\sigma_t}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{i_1^K + m\cdot\left(\sum_{j=2}^{t} s_j\right) - m\cdot\mu_t}{m\cdot\sigma_t}\right)^2}\right\}$$

$$\overset{(3)}{=} Ki^B - \left(Ki_1^K + Km\sum_{j=2}^{t} s_j\right)\cdot F_{N(0,1)}\left(\frac{i_1^K + m\left(\sum_{j=2}^{t} s_j\right) - m\mu_t}{m\cdot\sigma_t}\right) + Km\mu_t F_{N(0,1)}\left(\frac{i_1^K + m\left(\sum_{j=2}^{t} s_j\right) - m\mu_t}{m\cdot\sigma_t}\right) - \frac{Km\sigma_t}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{i_1^K + m\left(\sum_{j=2}^{t} s_j\right) - m\mu_t}{m\sigma_t}\right)^2}$$

$$= K\cdot\left\{i^B - \left(i_1^K + m\cdot\left(\sum_{j=2}^{t} s_j\right) - m\cdot\mu_t\right)\cdot F_{N(0,1)}\left(\frac{i_1^K + m\cdot\left(\sum_{j=2}^{t} s_j\right) - m\cdot\mu_t}{m\cdot\sigma_t}\right) - \frac{m\cdot\sigma_t}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{i_1^K + m\cdot\left(\sum_{j=2}^{t} s_j\right) - m\cdot\mu_t}{m\cdot\sigma_t}\right)^2}\right\}$$

mit der vereinfachenden Notation $d_t = i_1^K + m\cdot\sum\limits_{j=2}^{t} s_j$ gilt:

$$E\left(NZ_t^{Cap}\right) = K\cdot i^B - K\cdot\left\{\left(d_t - m\cdot\mu_t\right)\cdot F_{N(0,1)}\left(\frac{d_t - m\cdot\mu_t}{m\cdot\sigma_t}\right) + \frac{m\cdot\sigma_t}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{d_t - m\cdot\mu_t}{m\cdot\sigma_t}\right)^2}\right\}$$

Bei Berechnung von $E\left(NZ_t^{Cap}\right)$ gegebene Hinweise:

(1): Vgl. bspw. Bol (2004), S. 110.
(2):

$$\int_{-\infty}^{\frac{i_1^K}{m}+\sum_{j=2}^{t}s_j} y\cdot f_{N(\mu_t,\sigma_t)}(y)dy = \int_{-\infty}^{\frac{i_1^K}{m}+\sum_{j=2}^{t}s_j} y\cdot\frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi\cdot\sigma_t^2}}\cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu_t}{\sigma_t}\right)^2}dy$$

Substitution:

$$l := \frac{y-\mu_t}{\sigma_t}$$

$$y = l\cdot\sigma_t+\mu_t$$

$$\frac{dl}{dy}=\frac{1}{\sigma_t}\Rightarrow dy = dl\cdot\sigma_t$$

Obere Integrationsgrenze: $\dfrac{i_1^K+m\cdot\left(\sum_{j=2}^{t}s_j\right)-m\cdot\mu_t}{m\cdot\sigma_t}$

$$=\int_{-\infty}^{\frac{i_1^K+m\cdot\left(\sum_{j=2}^{t}s_j\right)-m\cdot\mu_t}{m\cdot\sigma_t}}(l\cdot\sigma_t+\mu_t)\cdot\frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi\cdot\sigma_t^2}}\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot l^2}\cdot\sigma_t dl$$

$$=\int_{-\infty}^{\frac{i_1^K+m\cdot\left(\sum_{j=2}^{t}s_j\right)-m\cdot\mu_t}{m\cdot\sigma_t}} l\cdot\sigma_t\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot l^2}dl+\int_{-\infty}^{\frac{i_1^K+m\cdot\left(\sum_{j=2}^{t}s_j\right)-m\cdot\mu_t}{m\cdot\sigma_t}}\frac{\mu_t}{\sqrt{2\cdot\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot l^2}dl$$

$$=\left[-\frac{\sigma_t}{\sqrt{2\cdot\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot l^2}\right]_{-\infty}^{\frac{i_1^K+m\cdot\left(\sum_{j=2}^{t}s_j\right)-m\cdot\mu_t}{m\cdot\sigma_t}}+\mu_t\cdot F_{N(0,1)}\left(\frac{i_1^K+m\cdot\left(\sum_{j=2}^{t}s_j\right)-m\cdot\mu_t}{m\cdot\sigma_t}\right)$$

$$=-\frac{\sigma_t}{\sqrt{2\cdot\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{i_1^K+m\cdot\left(\sum_{j=2}^{t}s_j\right)-m\cdot\mu_t}{m\cdot\sigma_t}\right)^2}+\mu_t\cdot F_{N(0,1)}\left(\frac{i_1^K+m\cdot\left(\sum_{j=2}^{t}s_j\right)-m\cdot\mu_t}{m\cdot\sigma_t}\right)$$

(3): Vgl. bspw. Bol (2004), S. 109.

Anhang IV: Berechnung der Varianz von NZ_t^{Cap}

Mit den bei Berechnung des Erwartungswerts eingeführten Bezeichnungen gilt:

$$\operatorname{Var}\left(NZ_t^{Cap}\right)=E\left(\left(NZ_t^{Cap}\right)^2\right)-\left(E\left(NZ_t^{Cap}\right)\right)^2=\int_{-\infty}^{\infty}\left(c\left(y\right)\right)^2\cdot f_{N(\mu_t,\sigma_t)}\left(y\right)dy-\left(E\left(NZ_t^{Cap}\right)\right)^2$$

$$=\int_{-\infty}^{\frac{i_1^K}{m}+\sum_{j=2}^{t}s_j}\left(K\cdot i^B-K\cdot i_1^K-K\cdot m\cdot\left(\sum_{j=2}^{t}s_j\right)+K\cdot m\cdot y\right)^2\cdot f_{N(\mu_t,\sigma_t)}\left(y\right)dy+\int_{\frac{i_1^K}{m}+\sum_{j=2}^{t}s_j}^{\infty}\left(K\cdot i^B\right)^2\cdot f_{N(\mu_t,\sigma_t)}\left(y\right)dy-\left(E\left(NZ_t^{Cap}\right)\right)^2$$

$$=\left(K\cdot i^B-K\cdot i_1^K-K\cdot m\cdot\sum_{j=2}^{t}s_j\right)^2\cdot\int_{-\infty}^{\frac{i_1^K}{m}+\sum_{j=2}^{t}s_j}f_{N(\mu_t,\sigma_t)}\left(y\right)dy+2\left(K\cdot i^B-K\cdot i_1^K-K\cdot m\cdot\sum_{j=2}^{t}s_j\right)\cdot K\cdot m\cdot\int_{-\infty}^{\frac{i_1^K}{m}+\sum_{j=2}^{t}s_j}y\cdot f_{N(\mu_t,\sigma_t)}\left(y\right)dy$$

$$+K^2\cdot m^2\cdot\int_{-\infty}^{\frac{i_1^K}{m}+\sum_{j=2}^{t}s_j}y^2 f_{N(\mu_t,\sigma_t)}\left(y\right)dy+\int_{\frac{i_1^K}{m}+\sum_{j=2}^{t}s_j}^{\infty}\left(K\cdot i^B\right)^2 f_{N(\mu_t,\sigma_t)}\left(y\right)dy-\left(E\left(NZ_t^{Cap}\right)\right)^2$$

$$\overset{(1)}{=}K^2\left(i^B-i_1^K-m\sum_{j=2}^{t}s_j\right)^2 F_{N(0,1)}\left(\frac{i_1^K+m\left(\sum_{j=2}^{t}s_j\right)-m\cdot\mu_t}{m\cdot\sigma_t}\right)+2K^2m\left(i^B-i_1^K-m\sum_{j=2}^{t}s_j\right)\left\{\mu_t\cdot F_{N(0,1)}\left(\frac{i_1^K+m\left(\sum_{j=2}^{t}s_j\right)-m\cdot\mu_t}{m\cdot\sigma_t}\right)-\frac{\sigma_t}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{i_1^K+m\left(\sum_{j=2}^{t}s_j\right)-m\mu_t}{m\cdot\sigma_t}\right)^2}\right\}$$

$$+K^2m^2\left\{\left(\sigma_t^2+\mu_t^2\right)\cdot F_{N(0,1)}\left(\frac{i_1^K+m\left(\sum_{j=2}^{t}s_j\right)-m\cdot\mu_t}{m\cdot\sigma_t}\right)-\frac{\sigma_t\cdot\left(i_1^K+m\left(\sum_{j=2}^{t}s_j\right)+m\cdot\mu_t\right)}{m\cdot\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{i_1^K+m\left(\sum_{j=2}^{t}s_j\right)-m\cdot\mu_t}{m\cdot\sigma_t}\right)^2}\right\}+\left(K\cdot i^B\right)^2\left\{1-F_{N(0,1)}\left(\frac{i_1^K+m\left(\sum_{j=2}^{t}s_j\right)-m\mu_t}{m\cdot\sigma_t}\right)\right\}-\left(E\left(NZ_t^{Cap}\right)\right)^2$$

mit der vereinfachenden Notation $d_t = i_1^K + m \cdot \sum_{j=2}^{t} s_j$ gilt:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Var}\left(NZ_t^{Cap}\right) &= K^2\left(i^B - d_t\right)^2 \cdot F_{N(0,1)}\left(\frac{d_t - m\cdot\mu_t}{m\cdot\sigma_t}\right) + 2K^2 m\left(i^B - d_t\right)\left\{\mu_t \cdot F_{N(0,1)}\left(\frac{d_t - m\cdot\mu}{m\cdot\sigma_t}\right) - \frac{\sigma_t}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{d_t - m\cdot\mu}{m\cdot\sigma_t}\right)^2}\right\} \\
&+K^2 m^2\left\{\left(\sigma_t^2 + \mu_t^2\right)\cdot F_{N(0,1)}\left(\frac{d_t - m\cdot\mu_t}{m\cdot\sigma_t}\right) - \frac{\sigma_t\cdot\left(d_t + m\cdot\mu_t\right)}{m\cdot\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{d_t - m\cdot\mu_t}{m\cdot\sigma_t}\right)^2}\right\} + \left(K\cdot i^B\right)^2\left\{1 - F_{N(0,1)}\left(\frac{d_t - m\cdot\mu_t}{m\cdot\sigma_t}\right)\right\} - \left(E\left(NZ_t^{Cap}\right)\right)^2 \\
&= \left(K\cdot i^B\right)^2 + F_{N(0,1)}\left(\frac{d_t - m\cdot\mu_t}{m\cdot\sigma_t}\right)\cdot\left\{\left(K\cdot i^B - K\cdot d_t + K\cdot m\cdot\mu_t\right)^2 + K^2 m^2 \sigma_t^2 - \left(K\cdot i^B\right)^2\right\} + e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{d_t - m\cdot\mu_t}{m\cdot\sigma_t}\right)^2}\cdot\left\{\frac{K^2\cdot m\cdot\sigma_t}{\sqrt{2\pi}}\left(d_t - 2\cdot i^B - m\cdot\mu_t\right)\right\} - \left(E\left(NZ_t^{Cap}\right)\right)^2
\end{aligned}$$

Bei Berechnung von $\mathrm{Var}\left(NZ_t^{Cap}\right)$ gegebener Hinweis:

(1):

$$\int_{-\infty}^{\frac{i_1^K}{m}+\sum_{j=2}^{t} s_j} y^2 \cdot f_{N(\mu_t,\sigma_t)}(y)dy = \int_{-\infty}^{\frac{i_1^K}{m}+\sum_{j=2}^{t} s_j} y^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi\cdot\sigma_t^2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu_t}{\sigma_t}\right)^2} dy$$

Substitution:

$$a := \frac{y-\mu_t}{\sigma_t}$$

$$y = a\cdot\sigma_t + \mu_t$$

$$\frac{da}{dy} = \frac{1}{\sigma_t} \Rightarrow dy = da\cdot\sigma_t$$

Obere Integrationsgrenze: $\dfrac{i_1^K + m\cdot\left(\sum_{j=2}^{t} s_j\right) - m\cdot\mu_t}{m\cdot\sigma_t}$

$$= \int_{-\infty}^{\frac{i_1^K+m\cdot\left(\sum_{j=2}^{t} s_j\right)-m\cdot\mu_t}{m\cdot\sigma_t}} \left(a\cdot\sigma_t+\mu_t\right)^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi\cdot\sigma_t^2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot a^2} \cdot \sigma_t \, da$$

$$= \int_{-\infty}^{\frac{i_1^K+m\cdot\left(\sum_{j=2}^{t} s_j\right)-m\cdot\mu_t}{m\cdot\sigma_t}} \left(\sigma_t^2\cdot a^2 + 2\cdot\mu_t\cdot\sigma_t\cdot a + \mu_t^2\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi\cdot\sigma_t^2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}a^2} \cdot \sigma_t \, da$$

$$= \frac{\sigma_t^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{i_1^K+m\cdot\left(\sum_{j=2}^{t} s_j\right)-m\cdot\mu_t}{m\cdot\sigma_t}} a\cdot\left(a\cdot e^{-\frac{1}{2}a^2}\right) da + \frac{2\cdot\mu_t\cdot\sigma_t}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{i_1^K+m\cdot\left(\sum_{j=2}^{t} s_j\right)-m\cdot\mu_t}{m\cdot\sigma_t}} a\cdot e^{-\frac{1}{2}a^2} da + \frac{\mu_t^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{i_1^K+m\cdot\left(\sum_{j=2}^{t} s_j\right)-m\cdot\mu_t}{m\cdot\sigma_t}} e^{-\frac{1}{2}a^2} da$$

$$= \frac{\sigma_t^2}{\sqrt{2\pi}} \cdot \left\{ \left[a\cdot\left(-e^{-\frac{1}{2}\cdot a^2}\right)\right]_{-\infty}^{\frac{i_1^K+m\cdot\left(\sum_{j=2}^{t} s_j\right)-m\cdot\mu_t}{m\cdot\sigma_t}} - \int_{-\infty}^{\frac{i_1^K+m\cdot\left(\sum_{j=2}^{t} s_j\right)-m\cdot\mu_t}{m\cdot\sigma_t}} 1\cdot\left(-e^{-\frac{1}{2}a^2}\right) da \right\}$$

$$+ \frac{2\cdot\mu_t\sigma_t}{\sqrt{2\pi}} \cdot \left[-e^{-\frac{1}{2}\cdot a^2}\right]_{-\infty}^{\frac{i_1^K+m\cdot\left(\sum_{j=2}^{t} s_j\right)-m\cdot\mu_t}{m\cdot\sigma_t}} + \mu_t^2 \cdot F_{N(0,1)}\left(\frac{i_1^K + m\cdot\left(\sum_{j=2}^{t} s_j\right) - m\cdot\mu_t}{m\cdot\sigma_t}\right)$$

$$= \frac{\sigma_t^2}{\sqrt{2\pi}} \cdot \left\{ \frac{i_1^K + m \cdot \left(\sum_{j=2}^{t} s_j \right) - m \cdot \mu_t}{m \cdot \sigma_t} \cdot \left(-e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{i_1^K + m \cdot \left(\sum_{j=2}^{t} s_j \right) - m \cdot \mu_t}{m \cdot \sigma_t} \right)^2} \right) - 0 + \sqrt{2 \cdot \pi} \cdot F_{N(0,1)} \left(\frac{i_1^K + m \cdot \left(\sum_{j=2}^{t} s_j \right) - m \cdot \mu_t}{m \cdot \sigma_t} \right) \right\}$$

$$+ \frac{2\mu_t \sigma_t}{\sqrt{2\pi}} \cdot \left(-e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{i_1^K + m \cdot \left(\sum_{j=2}^{t} s_j \right) - m \cdot \mu_t}{m \cdot \sigma_t} \right)^2} \right) + \mu_t^2 \cdot F_{N(0,1)} \left(\frac{i_1^K + m \cdot \left(\sum_{j=2}^{t} s_j \right) - m \cdot \mu_t}{m \cdot \sigma_t} \right)$$

$$= \left(\sigma_t^2 + \mu_t^2 \right) \cdot F_{N(0,1)} \left(\frac{i_1^K + m \cdot \left(\sum_{j=2}^{t} s_j \right) - m \cdot \mu_t}{m \cdot \sigma_t} \right) - \frac{\sigma_t \cdot \left(i_1^K + m \cdot \left(\sum_{j=2}^{t} s_j \right) + m \cdot \mu_t \right)}{m \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{i_1^K + m \cdot \left(\sum_{j=2}^{t} s_j \right) - m \cdot \mu_t}{m \cdot \sigma_t} \right)^2}$$

Anhang V: Abschätzung der Varianz

$$\operatorname{Var}\left[\sum_{t=1}^{n}\frac{NZ_t^{Cap}}{1+r_t}\right]=\sum_{t=2}^{n}\frac{\operatorname{Var}\left(NZ_t^{Cap}\right)}{\left(1+r_t\right)^2}+2\cdot\sum_{t=2}^{n}\sum_{u=2}^{t-1}\frac{\operatorname{Cov}\left(NZ_u^{Cap},NZ_t^{Cap}\right)}{\left(1+r_u\right)\left(1+r_t\right)}$$

Für t größer u (mit u > 1) gilt:

$$NZ_t^{Cap}=\begin{cases}K\cdot i^B-K\cdot d_t+K\cdot m\cdot\left\{\left[\sum_{k=2}^{u}sp_k\right]+\left[\sum_{z=u}^{t}sp_z\right]\right\} & \text{, für}\left[\sum_{k=2}^{u}sp_k\right]+\left[\sum_{z=u}^{t}sp_z\right]\leq\frac{d_t}{m}\\ K\cdot i^B & \text{, für}\left[\sum_{k=2}^{u}sp_k\right]+\left[\sum_{z=u}^{t}sp_z\right]>\frac{d_t}{m}\end{cases}$$

, d. h. sowohl NZ_t^{Cap} als auch NZ_u^{Cap} sind monoton steigend in $\left[\sum_{k=2}^{u}sp_k\right]$. Über diese Beziehung hinaus ist zumindest tendenziell davon auszugehen, dass hohe Werte für $\left[\sum_{k=2}^{u}sp_k\right]$ mit hohen Werten für $\left[\sum_{z=u}^{t}sp_z\right]$ einhergehen und umgekehrt. Man trifft also leicht die Annahme, dass hohes NZ_u^{Cap} (tendenziell) mit hohem NZ_t^{Cap} einhergeht, mithin also, dass $\operatorname{Cov}\left(NZ_u^{Cap},NZ_t^{Cap}\right)>0$.

Darüber hinaus gilt:[59] $\operatorname{Cov}\left(NZ_u^{Cap},NZ_t^{Cap}\right)\leq\sqrt{\operatorname{Var}\left(NZ_u^{Cap}\right)\cdot\operatorname{Var}\left(NZ_t^{Cap}\right)}$.

Somit findet sich insgesamt:

$$\operatorname{Var}\left[\sum_{t=1}^{n}\frac{NZ_t^{Cap}}{1+r_t}\right]\in\left]\sum_{t=2}^{n}\frac{\operatorname{Var}\left(NZ_t^{Cap}\right)}{\left(1+r_t\right)^2};\ \sum_{t=2}^{n}\frac{\operatorname{Var}\left(NZ_t^{Cap}\right)}{\left(1+r_t\right)^2}+2\cdot\sum_{t=2}^{n}\sum_{u=2}^{t-1}\frac{\sqrt{\operatorname{Var}\left(NZ_u^{Cap}\right)\cdot\operatorname{Var}\left(NZ_t^{Cap}\right)}}{\left(1+r_u\right)\left(1+r_t\right)}\right]$$

[59] Allgemeingültige Eigenschaft der Kovarianz zweier Zufallsvariablen. Vgl. bspw. Bol (2004), S. 186.

Anhang VI: Referenzbeispiel – BGH vom 22. 3. 2011[60]

In diesem Anhang wird die Berechnung beschrieben, die vorgenommen wurde, um den – in Abschnitt 4.1 genannten – Erwartungswert des Barwerts der Nettozahlungen zu bestimmen, die aus dem CSL-Swap resultieren, der dem BFH-Urteil vom 22. 3. 2011 zugrunde liegt. Darüber hinaus wird auf die Abschätzung der Varianz (Standardabweichung) des genannten Barwerts eingegangen. Zunächst sind jedoch die Details der Geschäftsstruktur des betrachteten CSL-Swaps sowie die „Übersetzung" der Geschäftsstruktur in die im Zuge des Beitrags eingeführte Formalisierung darzustellen.

Für den CSL-Swap sind folgende kalendarischen Zeitpunkte relevant:

Datum	**16. 2. 2005**	**18. 8. 2005**	**20. 2. 2006**	**18. 8. 2006**	**19. 2. 2007**	**18. 8. 2007**
Beschreibung	Geschäftsabschluss	Erster Zahlungstausch (zustandsunabhängig)	Zweiter Zahlungstausch (zustandsunabhängig)	Dritter Zahlungstausch (zustandsabhängig)	Vierter Zahlungstausch (zustandsabhängig)	Fünfter Zahlungstausch (zustandsabhängig)
Datum	**18. 2. 2008**	**18. 8. 2008**	**18. 2. 2009**	**18. 8. 2009**	**18. 2. 2010**	
Beschreibung	Sechster Zahlungstausch (zustandsabhängig)	Siebter Zahlungstausch (zustandsabhängig)	Achter Zahlungstausch (zustandsabhängig)	Neunter Zahlungstausch (zustandsabhängig)	Zehnter Zahlungstausch (zustandsabhängig)	

Kalendarische Zeitpunkte des dem BFH-Urteil vom 22. 3. 2011 zugrundeliegenden CSL-Swaps

Die kalendarischen Zeitpunkte werden mit folgenden formalen Zahlungszeitpunkten t identifiziert:

Datum	**16. 2. 2005**	**18. 8. 2005**	**20. 2. 2006**	**18. 8. 2006**	**19. 2. 2007**	**18. 8. 2007**
Zahlungszeitpunkt t	0	1		2	3	4
Datum	**18. 2. 2008**	**18. 8. 2008**	**18. 2. 2009**	**18. 8. 2009**	**18. 2. 2010**	
Zahlungszeitpunkt t	5	6	7	8	9	

Formale Zahlungszeitpunkte des dem BFH-Urteil vom 22. 3. 2011 zugrundeliegenden CSL-Swaps

Dem 20. 2. 2006, an dem die zweite zustandsunabhängige Zahlung anfällt, wird also kein formaler Zahlungszeitpunkt t zugeordnet. Wie weiter unten erläutert, wird die zu diesem Zeitpunkt anfallende Zahlung außerhalb der eingeführten Formalisierung berücksichtigt.

[60] Vgl. BGH vom 22. 3. 2011 – XI ZR 33/10, S. 294.

Mit der eingeführten Notation und der vorgenommen Zeitstrahlbildung wies der CSL-Swap folgende Parameterwerte auf:[61]

$$K = 1.000.000\,€\ (2.000.000\,€)\,;\ n = 9\,;\ i^B = 0{,}03\ \text{p. a.}\,;\ i_1^K = 0{,}015\ \text{p. a.}\,;\ m = 3\ \text{und}$$
$$s_2 = 0{,}01;\ s_3 = 0{,}01;\ s_4 = 0{,}0085;\ s_5 = 0{,}0085;\ s_6 = 0{,}007;\ s_7 = 0{,}007;\ s_8 = 0{,}0055;\ s_9 = 0{,}0055$$

Aus der Tatsache, dass die zwischen den einzelnen Zahlungen liegenden Zinsperioden jeweils nur ein halbes Jahr betragen, aber insbesondere die Zinssätze i_1^K und i^B – in der Sachverhaltsbeschreibung des BFH-Urteils – pro Jahr angegeben sind, folgt das Erfordernis, dass die Zinssätze bei Berechnung der tatsächlichen Zahlungen zu halbieren wären. Um dies zu vermeiden und die eingeführten Bezeichnungen uneingeschränkt verwenden zu können – und trotzdem zu den tatsächlichen Gegebenheiten entsprechenden Werten zu gelangen –, wird im Folgenden statt des Zinssatzes der Kapitalbetrag K halbiert. Bei sämtlichen Berechnungen wird dementsprechend statt der nominell angegebenen 2.000.000 Euro $K = 1.000.000$ Euro zugrunde gelegt.

Als weitere zur Berechnung von Erwartungswert und Varianz des betrachteten Barwerts erforderliche Inputgrößen sind die einzelnen r_t zu bestimmen. Hierzu ist auf die restlaufzeitabhängige Verzinsung deutscher börsennotierter Bundeswertpapiere abzustellen. Beim Abschluss des CSL-Swaps wiesen deutsche börsennotierte Bundeswertpapiere folgende restlaufzeitabhängige Verzinsungen auf.

Laufzeit in Jahren	**0,5**	**1**	**1,5**	**2**	**2,5**	**3**	**3,5**	**4**	**4,5**	**5**
(nahezu) risikoloser Zinssatz in % p. a.	2,12	2,27	./.	2,57	./.	2,8	./.	3	./.	3,18

Risikoloser restlaufzeitabhängiger Zinssatz deutscher börsennotierter Bundeswertpapiere (Februar 2005)[62]

[61] Vgl. BGH vom 22. 3. 2011 – XI ZR 33/10, S. 294.
[62] Zinssätze aus den Zeitreihen der deutschen Bundesbank mit den Bezeichnungen „Zinsstrukturkurve (Svensson-Methode)/Börsennotierte Bundeswertpapiere/0,5 Jahre RLZ/Monatsendstand"; „Zinsstrukturkurve (Svensson-Methode)/Börsennotierte Bundeswertpapiere/1,0 Jahr(e) RLZ/Monatsendstand"; usw. bis „Zinsstrukturkurve (Svensson-Methode)/Börsennotierte Bundeswertpapiere/5,0 Jahr(e) RLZ/Monatsendstand" entnommen. Die Zeitreihen sind im Internet abrufbar; URL: http://www.bundesbank.de/Navigation/DE/Statistiken/Zeitreihen_Datenbanken/Makrooekonomische_Zeitreihen/its_list_node.html?listId=www_s140_it03a

Aus diesen Zinssätzen lässt sich der periodenabhängige Zinssatz r_t, der die Gesamtverzinsung einer (nahezu) risikolosen Finanzanlage widerspiegelt, die vom Zeitpunkt 0 bis zum Zeitpunkt t läuft, ermitteln. Es ergeben sich für die einzelnen r_t folgende Werte: [63]

(Zahlungszeitpunkt des Geschäfts)	**1**	**(./.)**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
Sich aus dem risikolosen Zinssatz ergebende r_t	0,0106	0,027	0,0409	0,0521	0,0656	0,0864	0,1016	0,1255	0,1424	0,1694

Die vorgenommene Berechnung sei exemplarisch für r_2 wiedergegeben:

$$r_2 := (1+0{,}027)\cdot(1+0{,}5\cdot 0{,}027)-1 = 0{,}0409$$

Unterstellt man letztlich – wie im Abschnitt 4.1 des Textteils – für $\vec{\mu}$ und $\vec{\sigma}$ folgende Werte[64]

$$\vec{\mu} = (0{,}00939;\ 0{,}01878;\ 0{,}02815;\ 0{,}03757;\ 0{,}04689;\ 0{,}05605;\ 0{,}06498;\ 0{,}07366)$$

$\vec{\sigma} = (0{,}00922;\ 0{,}01768;\ 0{,}02548;\ 0{,}03244;\ 0{,}03861;\ 0{,}04400;\ 0{,}04858;\ 0{,}05214)$, so sind sämtliche zur Bestimmung des Erwartungswerts erforderlichen Inputgrößen vorhanden.

Grundsätzlich ergibt sich der gesuchte Erwartungswert, indem die Inputgrößen in folgende – im Abschnitt 3 des Textteils hergeleitet – Formel eingesetzt wird:

$E\left[\sum_{t=1}^{n}\frac{NZ_t^{Cap}}{1+r_t}\right] = \sum_{t=1}^{n}\frac{E\left(NZ_t^{Cap}\right)}{1+r_t}$. Da der zweiten zustandsunabhängigen Zahlung jedoch kein eigener Zeitpunkt t zugewiesen wurde, ist die Formel dahingehend zu modifizieren, dass auch der durch diese Zahlung erzeugte Wertbeitrag erfasst wird. Es gilt daher:

$$\text{E.wert des Barwerts der Nettoz.} = \sum_{t=1}^{9}\frac{E\left(NZ_t^{Cap}\right)}{1+r_t} + \frac{\text{Nicht mit eigenem Zeitpunkt versehene zweite Nettozahlung}}{1+0{,}027}$$

Zur konkreten Durchführung der Berechnung sind die einzelnen Summanden zunächst zu berechnen und anschließend aufzusummieren. Die Berechnung der Summanden

$\frac{E\left(NZ_1^{Cap}\right)}{1+r_1}$; $\frac{\text{Nicht mit eigenem Zeitpunkt versehene zweite Nettozahlung}}{1+0{,}027}$ und $\frac{E\left(NZ_4^{Cap}\right)}{1+r_4}$ soll exemplarisch wiedergegeben werden:

[63] Die gewählte Methodik weist mehrere Vereinfachungen auf. Die hieraus resultierenden Ungenauigkeiten sind für die Kernpunkte des vorliegenden Beitrags allerdings von nachrangiger Relevanz. Auf eine Beschreibung der Vereinfachungen soll daher an dieser Stelle verzichtet werden. Vgl. ausführlich zur Ermittlung der risikolosen Renditen bspw. Drukarczyk/Schüler (2009), S. 209-213.

[64] Vgl. zur Gewinnung dieser Werte im Textteil Abschnitt 4. 1.

- $\frac{E\left(NZ_1^{Cap}\right)}{1+r_1} = \frac{1.000.000 \cdot \left(i^B - i_1^K\right)}{1+0,0106} = \frac{1.000.000 \cdot (0,03-0,015)}{1,0106} = 14.842,67$
- $\frac{\text{Nicht mit eigenem Zeitpunkt versehene zweite Nettozahlung}}{1+0,027} = \frac{1.000.000 \cdot \left(0,03-0,015\right)}{1,027} = 14.605,65$
- $\frac{E\left(NZ_4^{Cap}\right)}{1+r_4} = \frac{K \cdot i^B - K \cdot \left\{ \left(d_4 - m \cdot \mu_4\right) \cdot F_{N(0,1)}\left(\frac{d_4 - m \cdot \mu_4}{m \cdot \sigma_4}\right) + \frac{m \cdot \sigma_4}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{d_4 - m \cdot \mu_4}{m \cdot \sigma_4}\right)^2} \right\}}{1+0,0656}$

mit $d_4 = i_1^K + m \cdot \sum_{j=2}^{4} s_j = 0,015 + 3 \cdot \left(0,01+0,01+0,0085\right) = 0,1005$

findet sich:

$$\frac{E\left(NZ_4^{Cap}\right)}{1+r_4} = \frac{1.000.000 \cdot 0,03 - 1.000.000 \cdot \left\{ \left(0,1005 - 3 \cdot 0,02815\right) \cdot F_{N(0,1)}\left(\frac{0,1005 - 3 \cdot 0,02815}{3 \cdot 0,02548}\right) + \frac{3 \cdot 0,02548}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{0,1005 - 3 \cdot 0,02815}{3 \cdot 0,02548}\right)^2} \right\}}{1+0,0656}$$
$$= -\,8.624$$

Die Berechnung der übrigen Summanden von $\sum_{t=1}^{9} \frac{E\left(NZ_t^{Cap}\right)}{1+r_t}$ erfolgt absolut analog zur Berechnung von $\frac{E\left(NZ_4^{Cap}\right)}{1+r_4}$. Es ergeben sich folgende Einzelwerte:

$\frac{E\left(NZ_2^{Cap}\right)}{1+r_2} = 8.232$; $\frac{E\left(NZ_3^{Cap}\right)}{1+r_3} = -1.698$; $\frac{E\left(NZ_5^{Cap}\right)}{1+r_5} = -14.572$; $\frac{E\left(NZ_6^{Cap}\right)}{1+r_6} = -17.650$;
$\frac{E\left(NZ_7^{Cap}\right)}{1+r_7} = -20.067$; $\frac{E\left(NZ_8^{Cap}\right)}{1+r_8} = -20.195$; $\frac{E\left(NZ_9^{Cap}\right)}{1+r_9} = -19.601$.

Insgesamt ergibt sich der im Textteil genannte Erwartungswert:

$$\text{E.wert des Barwerts der Nettoz.} = \sum_{t=1}^{9} \frac{E\left(NZ_t^{Cap}\right)}{1+r_t} + \frac{\text{Nicht mit eigenem Zeitpunkt versehene zweite Nettozahlung}}{1+0,027}$$
$$= 14.843 + 8.232 - 1.698 - 8.624 - 14.572 - 17.650 - 20.067 - 20.195 - 19.601 + 14.606$$
$$\approx -\,64.727$$

Auf die explizite Angabe der einzelnen zur Berechnung der **Varianz** des Barwerts der Nettozahlungen erforderlichen Berechnungsschritte wird verzichtet. Die Berechnung läuft analog zur Berechnung des Erwartungswerts. Die Geschäftsparameter sind lediglich statt in die Berechnungsformel des Erwartungswerts in die zur Abschätzung der Varianz gegebene „Formel“[65] einzusetzen. Eine – wie bei Berechnung des Erwartungswerts vorgenommene – Modifikation der Bestimmungsformel zur Erfassung der zweiten nicht mit einem eigenen Zahlungszeitpunkt versehenen zustandsunabhängigen Nettozahlung ist nicht erforderlich. Sowohl die Einzelvarianz der Zahlung als auch sämtliche Kovarianzen der Zahlung mit den übrigen

[65] Vgl. im Textteil Abschnitt 3.

Nettozahlungen weisen den Wert null auf, weshalb die Zahlung keinen Wertbeitrag zur Gesamtvarianz des Barwerts liefert und bei praktischer Berechnung der Gesamtvarianz schlicht zu ignorieren ist.

Quellenverzeichnis

Bamberg, Günter/Baur, Franz/Krapp, Michael (2007): Statistik, 13. Aufl., München.

Beckers, Thorsten/Klatt, Jan Peter (2008): Potenziale und Erfolgsfaktoren des PPP-Ansatzes – Studie im Auftrag der Initiative Finanzstandort Deutschland (IFD), Berlin.

Bol, Georg (2004): Wahrscheinlichkeitstheorie – Einführung, 5. Aufl., München.

Bösch, Martin (2012): Derivate, 2. Aufl., München.

Büning, Herbert/Trenkler, Götz (1978): Nichtparametrische statistische Methoden, Berlin.

Büning, Herbert/Trenkler, Götz (1994): Nichtparametrische statistische Methoden, 2. Aufl., Berlin.

Deutscher Bundestag – Finanzausschuss Wortprotokoll 48. Sitzung (2011): Öffentliche Anhörung zu „Zins-Swap-Geschäften deutscher Banken mit Gemeinden und mittelständischen Unternehmen", Protokoll Nr. 17/48, URL: http://www.bundestag.de/bundestag/ausschuesse17/a07/anhoerungen/2011/048/048-06_04_11-__A_Zins-Swap.pdf – letzter Abruf: 22. 8. 2012.

Drukarczyk, Jochen/Schüler, Andreas (2009): Unternehmensbewertung, 6. Aufl., München.

Graf, Ulrich u. a. (1998): Formeln und Tabellen der angewandten mathematischen Statistik, 3. Aufl., Berlin, S. 133.

Gundermann, Peter/Nieding, Klaus (2007): Der CMS Spread Ladder Swap als Anlagefalle für Kommunen, in: Der Gemeindehaushalt, H. 12, S. 265-269.

Hafner, Robert (1992): Statistik für Sozial- und Wirtschaftswissenschaftler, Wien.

Hafner, Robert (2000): Statistik für Sozial- und Wirtschaftswissenschaftler, Band 1, 2. Aufl., Wien.

Hager, Gert (2011): Stellungnahme des Oberbürgermeisters der Stadt Hagen zur öffentlichen Anhörung zum Thema „Zins-Swap-Geschäften deutscher Banken mit Gemeinden und mittelständischen Unternehmen", URL: http://www.bundestag.de/bundestag/ausschuesse17/a07/anhoerungen/2011/048/index.html – letzter Abruf: 19. 7. 2012.

Hartung, Joachim (1999): Statistik, 12. Aufl., München.

Lilliefors, Hubert W. (1967): On the Kolmogorov-Smirnov test for normality with mean and variance unknown, in: Journal of the American Statistical Association, Vol. 62, No. 318 (Jun. 1967), S. 399-402, URL: http://www.jstor.org/stable/pdfplus/2283970.pdf?acceptTC=true.

Nieding, Klaus/Barth, Peter (2011): Stellungnahme der Rechtsanwaltsaktiengesellschaft „Nieding + Barth" zur öffentlichen Anhörung zum Thema „Zins-Swap-Geschäften deutscher Banken mit Gemeinden und mittelständischen Unternehmen", Frankfurt am Main, URL: http://www.bundestag.de/bundestag/ausschuesse17/a07/anhoerungen/2011/048/index.html – letzter Abruf: 22. 8. 2012.

Perridon, Louis/Steiner, Manfred/Rathgeber, Andreas (2009): Finanzwirtschaft der Unternehmung, 15. Aufl., München.

Rössner (2011): Stellungnahme von Rössner Rechtsanwälte zur öffentlichen Anhörung zu Zins-Swap-Geschäften deutscher Banken mit Gemeinden und mittelständischen Unternehmen vor dem Finanzausschuss des Deutschen Bundestags, URL: http://www.bundestag.de/bundestag/ausschuesse17/a07/anhoerungen/2011/048/index.html – letzter Abruf: 22. 8. 2012.

Schindler, Klaus (2002): Mathematik für Ökonomen – Grundlagen für Betriebswirte, Volkswirte und Wirtschaftsingenieure, 4. Aufl., Wiesbaden.

Schlittgen, Rainer (1997): Einführung in die Statistik – Analyse und Modellierung von Daten, 7. Aufl., München.

Stark, Gunnar/Loose, Christian (2007): Exotische Zinsderivate im kommunalen Schuldenmanagement – Eine Analyse der jüngsten CMS-Spread-Ladder-Swap-Geschäfte, in: Finanz Betrieb, S. 610-618.

Weck, Jochen/Schick, Michael (2012): Unwirksamkeit spekulativer Swap-Geschäfte im kommunalen Bereich, in: Neue Zeitschrift für Verwaltungsrecht (NZwR), 31. Jg., H. 1, S. 18-22.

Rechtsprechung

Gericht und Datum	Aktenzeichen	Fundstelle
BGH vom 22. 3. 2011	XI ZR 33/10	Zeitschrift für Bank- und Kapitalmarktrecht 2011, S. 293-299
LG Düsseldorf vom 11. 5. 2012	8 O 77/11	Einzusehen im Internet bei Beck-Rechtsprechung 2012, Nr. 11801
LG Wuppertal vom 16. 7. 2008	3 O 33/08	Einzusehen im Internet bei Beck-Rechtsprechung 2008, Nr. 14152
OLG Bamberg vom 11. 5. 2009	4 U 92/08	Zeitschrift für Bank- und Kapitalmarktrecht 2009, S. 288-306